2020～2021 年度河南省高三一轮复习摸底考试

数学(理科)

考生注意：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共 150 分。考试时间 120 分钟
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|3-x>1\}$，$B=\{x|3-3^x>0\}$，则

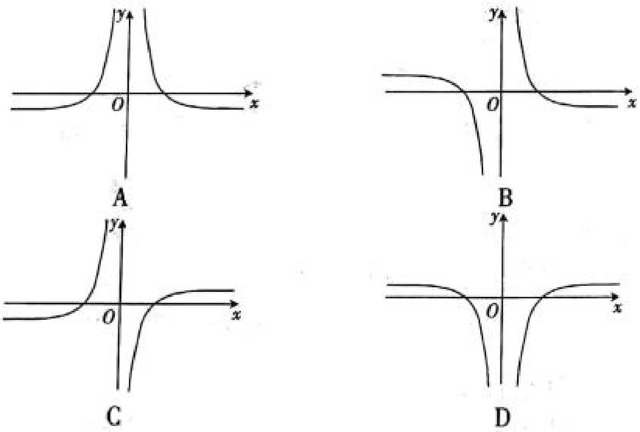
A. $A\cap B=\{x|x>1\}$　　B. $A\cup B=\{x|x>2\}$

C. $A\cup B=\mathbf{R}$　　D. $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|1\leqslant x<2\}$

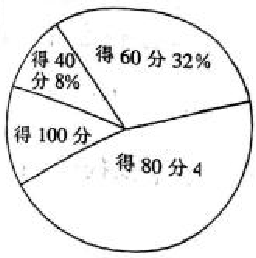
2. 设 $(-1+2\mathrm{i})x=y-1-6\mathrm{i}$，$x,y\in\mathbf{R}$，则 $|x-y\mathrm{i}|=$

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

3. 函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x|}$ 的图象大致为



4. 某高中为了解学生课外知识的积累情况，随机抽取 200 名同学参加课外知识测试，测试10道题，每答对一题得 20 分，答错得 0 分. 已知每名同学至少能答对 2 道题，得分不少于 6分记为及格，不少于 80 分记为优秀，测试成绩百分比分布图如图所示，则下列说法正确的是



A. 该次课外知识测试及格率为 90%

B. 该次课外知识测试得满分的同学有 30 名

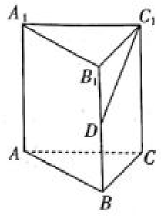
C. 该次测试成绩的中位数大于测试成绩的平均数

D. 若该校共有 3000 名学生，则课外知识测试成绩能得优秀的同学大约有 1440 名

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-3)$，则 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为

A. $\frac{13\sqrt{2}}{2}$　　B. $-\frac{13\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{13\sqrt{89}}{89}$　　D. $-\frac{13\sqrt{89}}{89}$

6. 如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，点 D 是侧棱 BB_1 的中点，则直线 C_1D 与平面 ABC 所成角的余弦值为



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

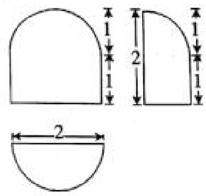
C. $\frac{\sqrt{7}}{7}$　　D. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

7. 已知函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)(-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后，与函数 $g(x)=\sin 2x$ 的图象重合，则 $f(x)$ 的单调递减区间为

A. $[k\pi+\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{5\pi}{6}](k\in\mathbf{Z})$　　B. $[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}](k\in\mathbf{Z})$

C. $[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}](k\in\mathbf{Z})$　　D. $[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}](k\in\mathbf{Z})$

8. 某几何体的三视图如图所示，其中俯视图中的半圆的直径为 2，则该几何体的表面积为



A. $3\pi+2$　　B. $4\pi+2$

C. $3\pi+3$　　D. $4\pi+3$

9. 意大利数学家斐波那契于 1202 年在他撰写的《算盘全书》中提出一个数列：1，1，2，3，5，8，13，21，34，……. 这个数列称为斐波那契数列，该数列与自然界的许多现象有密切关系，在科学研究中有着广泛的应用. 该数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$，则该数列的前 1000 项中，为奇数的项共有

A. 333 项　　B. 334 项　　C. 666 项　　D. 667 项

10. 已知抛物线 $C:y^2=4x$，过点 $(2,0)$ 的直线 l 交 C 于 A，B 两点，则直线 OA，OB（O 为坐标原点）的斜率之积为

A. -8　　B. -4　　C. -2　　D. -1

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{2n}-a_{2n-1}=3^n-1$，$a_{2n+1}+a_{2n}=3^n+5(n\in\mathbf{N}_+)$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 40 项和 $S_{40}=$

A. $\frac{3^{21}+197}{2}$　　B. $\frac{3^{20}+197}{2}$　　C. $9^{10}+98$　　D. $9^{20}+98$

12. 已知定义域为 $(0,+\infty)$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x^2}$，且 $f(\mathrm{e})=\frac{2}{\mathrm{e}}$，e 为自然对数的底数，若关于 x 的不等式 $\frac{f(x)}{x}-x-\frac{a}{x}+2\leqslant 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为

A. $[1,+\infty)$　　B. $[2,+\infty)$

C. $[\frac{\mathrm{e}+2}{\mathrm{e}},+\infty)$　　D. $[\frac{-\mathrm{e}^3+2\mathrm{e}^2+2}{\mathrm{e}},+\infty)$

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡中的横线上．

13．已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}x+y\geqslant 1,\\ x\leqslant 1,\\ y\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=3x-y$ 的最小值为__▲__．

14．小张计划从 5 个沿海城市和 4 个内陆城市中随机选择 2 个去旅游，则他至少选择 1 个沿海城市的概率是__▲__．

15．已知双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在其右支上，$\triangle F_1PF_2$ 的内切圆为⊙I，$F_2M\perp PI$，垂足为点 M，O 为坐标原点，则 $|OM|=$__▲__．

16．定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)+f(x)=0$，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2$．若不等式 $\frac{1}{4}f(ax^2)+f(3-x)\geqslant 0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的最小值为__▲__．

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每道试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．（12 分）

在△ABC 中，a,b,c 分别为角 A,B,C 的对边，且 $b\cos A=c-\frac{\sqrt{3}}{2}a$．

（1）求角 B；

（2）若△ABC 的面积为 $2\sqrt{3}$，BC 边上的高 $AH=1$，求 b,c．

18．（12 分）

某射击小组由两名男射手与一名女射手组成，射手的每次射击都是相互独立的，已知每名男射手每次的命中率为 $\frac{2}{3}$，女射手每次的命中率为 $\frac{1}{3}$．

（1）当每人射击 2 次时，求该射击小组共射中目标 4 次的概率；

（2）当每人射击 1 次时，规定两名男射手先射击，如果两名男射手都没有射中，那么女射手失去射击资格．一个小组共射中目标 3 次得 100 分，射中目标 2 次得 60 分，射中目标 1 次得 10 分，没有射中目标得 -50 分．用随机变量 X 表示这个射击小组的总得分，求 X 的分布列及数学期望．

19.(12分)

点E,F分别是正方形$ABCD$的边AB,BC的中点，点M在边AB上，且$AB=3AM$，沿图1中的虚线DE,EF,FD将$\triangle ADE,\triangle BEF,\triangle CDF$折起使$A,B,C$三点重合，重合后的点记为点$P$，如图2.

(1)证明：$PF\perp DM$.

(2)求二面角$P-DM-F$的余弦值.

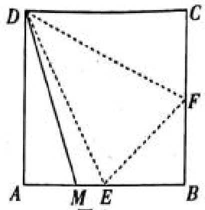


图1

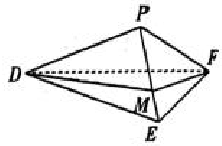


图2

20.(12分)

已知动点P到点$(-\sqrt{6},0)$的距离与到直线$x=-\frac{4\sqrt{6}}{3}$的距离之比为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求动点P的轨迹C的标准方程.

(2)过点$A(-4,0)$的直线l交C于M,N两点，已知点$B(-2,-1)$，直线BM,BN分别交x轴于点E,F. 试问在x轴上是否存在一点G，使得$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{BF}=0$？若存在，求出点$G$的坐标；若不存在，请说明理由.

21. (12分)

已知函数$f(x)=\ln(x+3)-x$.

(1)求函数$f(x)$的最大值.

(2)若关于x的方程$a\mathrm{e}^x+\ln\frac{a}{x+3}=3(a>0)$有两个不等实数根$x_1,x_2$，证明：$\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{x_2}>\frac{2}{a}$.

(二)选考题：共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修4—4：坐标系与参数方程](10分)

22. 在极坐标系中，点$A(1,\frac{\pi}{6}),B(1,\frac{\pi}{2})$，曲线$C:\rho=2\sin(\theta+\frac{\pi}{3})$. 以极点为坐标原点，极轴为$x$轴正半轴建立平面直角坐标系.

(1)在直角坐标系中，求点A,B的直角坐标及曲线C的参数方程；

(2)设点P为曲线C上的动点，求$|PA|^2+|PB|^2$的取值范围.

23.[选修4—5：不等式选讲](10分)

(1)已知$a+b+c=1$，证明：$(a+2)^2+(b+2)^2+(c+2)^2\geq\frac{49}{3}$.

(2)若对任意实数x，不等式$|x-a|+|2x+1|\geq\frac{3}{2}$恒成立，求实数$a$的取值范围.

2020～2021年度河南省高三一轮复习摸底考试
数学参考答案(理科)

1. D 【解析】本题考查集合的运算，考查运算求解能力.
因为 $A=\{x|x<2\}$，$B=\{x|x<1\}$，所以 $A\cap B=\{x|x<1\}$，$A\cup B=\{x|x<2\}$，又因为 $\complement_{R}B=\{x|x\geqslant 1\}$，所以 $A\cap(\complement_{R}B)=\{x|1\leqslant x<2\}$.选项A、B、C都错，D正确.

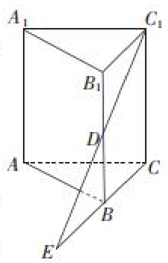
2. B 【解析】本题考查复数的四则运算，考查运算求解能力.
因为$(-1+2i)x=y-1-6i$，所以$\begin{cases}2x=-6,\\-x=y-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-3,\\y=4,\end{cases}$所以$|x-yi|=5$.

3. D 【解析】本题考查函数的奇偶性，考查识图能力与推理论证能力.
因为 $f(x)=\frac{\ln|x|}{|x|}$ 的定义域为$\{x|x\neq 0\}$，$f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，排除B，C选项，又 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$，所以选项D正确.

4. C 【解析】本题考查统计知识，考查数据处理能力.
由图可知及格率为 $1-8\%=92\%$，故A错误.该次课外知识测试满分同学的百分比为 $1-8\%-32\%-48\%=12\%$，满分的同学共有 $12\%\times 200=24$ 名，故B错误.中位数为80分，平均数为 $40\times 8\%+60\times 32\%+80\times 48\%+100\times 12\%=72.8$ 分，故C正确. $3000\times(48\%+12\%)=1800$，故D错误.

5. B 【解析】本题考查平面向量的投影，考查运算求解能力.
由题意可得$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(-5,8)\cdot(1,-1)=-13$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，所以 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为$\frac{(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\frac{-13}{\sqrt{2}}=-\frac{13\sqrt{2}}{2}$.

6. D 【解析】本题考查直线与平面所成角的余弦值，考查空间想象能力.
(方法一)如图，延长 C_1D，与 CB 的延长线交于点 E，因为 $CC_1\perp$平面 ABC，所以 C_1D 与平面 ABC 所成的角为$\angle CEC_1$.又 $AB=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，点 D 是 BB_1 的中点，所以 $CE=2$，$C_1E=\sqrt{7}$，从而 $\cos\angle CEC_1=\frac{CE}{C_1E}=\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，即 C_1D 与平面 ABC 所成角的余弦值为$\frac{2\sqrt{7}}{7}$.



(方法二)因为 $BB_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$，所以 C_1D 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成的角为$\angle DC_1B_1$.又 $B_1C_1=1$，$B_1D=\frac{\sqrt{3}}{2}$，可得 $C_1D=\frac{\sqrt{7}}{2}$，所以 $\cos\angle DC_1B_1=\frac{B_1C_1}{DC_1}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.而平面 $A_1B_1C_1$ // 平面 ABC，所以 C_1D 与平面 ABC 所成角的余弦值为$\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

7. C 【解析】本题考查三角函数的性质，考查运算求解能力.
由题意可得 $g(x)=\sin[2(x-\frac{\pi}{12})+\frac{\pi}{2}+\varphi)=\sin(2x+\frac{\pi}{3}+\varphi)=\sin 2x$，则$\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.因为$-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{3})$，令 $2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，即 $f(x)$的单调递减区间为$[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}](k\in\mathbf{Z})$.

8. A 【解析】本题考查三视图的知识，考查空间想象能力.
这个几何体是由一个底面半径为1且高为1的半圆柱，和一个半径为1的半球的前半部分组成，所以它的下底面为半圆，面积为$\frac{\pi}{2}$，后表面为一个矩形加半圆，面积为 $2\times 1+\frac{\pi}{2}$，前表面为半个圆柱侧面加$\frac{1}{4}$个球面，面积为 $\pi\times 1\times 1+\frac{1}{4}\times 4\pi\times 1=2\pi$，所以其表面积为 $3\pi+2$.

9. D 【解析】本题考查数学文化与数列的应用，考查推理论证能力.
因为 $a_1=a_2=1$ 为奇数，$a_3=2$ 为偶数，$a_4=3$，$a_5=5$ 为奇数，$a_6=8$ 为偶数，依此类推，a_9，a_{12}，…，a_{999} 为偶数.

由 $999=3+3(n-1)=3n$，可得为偶数的项共有 333 项，那么为奇数的项共有 667 项.

10. C **【解析】本题考查直线与抛物线的位置关系，考查运算求解能力.**

设点 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，设 l 的方程为 $x=ty+2$，则 $\begin{cases}x=ty+2,\\ y^2=4x.\end{cases}$

得 $y^2-4ty-8=0$，则 $y_A\cdot y_B=-8$，所以 $x_A\cdot x_B=\frac{y_A^2\cdot y_B^2}{16}=4$. 从而 $\frac{y_A\cdot y_B}{x_A\cdot x_B}=\frac{-8}{4}=-2$.

11. A **【解析】本题考查数列的综合应用，考查化归与转化的数学思想.**

由题意可得 $a_{2n+1}+a_{2n-1}=6$，则 $a_{2n+2}+a_{2n}-(a_{2n+1}+a_{2n-1})=4\times3^n-2$，即 $a_{2n+2}+a_{2n}=4\times3^n+4$，故 $S_{40}=(a_1+a_3+\cdots+a_{37}+a_{39})+(a_2+a_4+\cdots+a_{38}+a_{40})$

$=6\times10+4\times10+4\times(3^1+3^3+\cdots+3^{19})=100+4\times\frac{3(9^{10}-1)}{8}=\frac{3^{21}+197}{2}$.

12. B **【解析】本题考查导数的综合应用，考查数形结合、化归与转化的数学思想.**

由 $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x^2}$，得 $xf'(x)+f(x)=\frac{1}{x}$. 设 $g(x)=xf(x)$，$g'(x)=xf'(x)+f(x)=\frac{1}{x}$，

则 $g(x)=\ln x+c$，从而有 $f(x)=\frac{\ln x+c}{x}$.

又因为 $f(e)=\frac{1+c}{e}=\frac{2}{e}$，所以 $c=1$，$f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，$f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f(1)=1$.

因为不等式 $\frac{f(x)}{x}-x-\frac{a}{x}+2\leqslant0$ 恒成立，所以 $f(x)-x^2+2x-a\leqslant0$，

即 $f(x)-(x-1)^2+1\leqslant a$，又因为 $f(x)-(x-1)^2+1\leqslant2$，所以 $a\geqslant2$.

13. -1 **【解析】本题考查线性规划问题，考查数形结合的思想与运算求解能力.**

画出可行域(图略)，由图可知，直线 $z=3x-y$ 过点 $(0,1)$ 时，z 取得最小值 -1.

14. $\frac{5}{6}$ **【解析】本题考查排列组合知识的应用，考查数据处理能力和应用意识.**

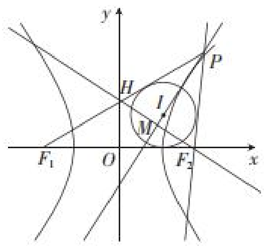
由间接法可得所求概率 $P=1-\frac{C_4^2}{C_9^2}=1-\frac{6}{36}=\frac{5}{6}$.

15. 1 **【解析】本题考查直线与双曲线的位置关系，考查运算求解能力.**

如图，延长 F_2M，使 F_2M 交 PF_1 于点 H，

由双曲线的定义可得 $|PF_1|-|PF_2|=|F_1H|=2a=2$.

因为 OM 为 $\triangle F_1HF_2$ 的中位线，所以 $|OM|=\frac{1}{2}|F_1H|=1$.



16. $\frac{1}{6}$ **【解析】本题考查函数的性质与不等式的恒成立问题，考查推理论证能力.**

由已知得 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\geqslant0,\\ -x^2,x<0,\end{cases}$ 不等式 $\frac{1}{4}f(ax^2)+f(3-x)\geqslant0$ 可化为 $f(ax^2)\geqslant 4f(x-3)=f(2x-6)$. 因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以 $ax^2\geqslant2x-6$，即 $ax^2-2x+6\geqslant0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，所以 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=4-24a\leqslant0,\end{cases}$ 即 $a\geqslant\frac{1}{6}$.

17. 解：(1)因为 $b\cos A=c-\frac{\sqrt{3}}{2}a$，所以 $b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c-\frac{\sqrt{3}}{2}a$， ………… 1 分

所以 $b^2+c^2-a^2=2c^2-\sqrt{3}ac$，即 $c^2+a^2-b^2=\sqrt{3}ac$. ………… 2 分

由余弦定理可得 $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{3}}{2}$， ………… 4 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$. ………… 5 分

(2)由正弦定理可得 $c=\dfrac{AH\sin\angle AHB}{\sin B}=\dfrac{AH\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{6}}=2$. ………………………………………… 7 分

因为△ABC 的面积为 $2\sqrt{3}$，所以 $\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}a=2\sqrt{3}$，解得 $a=4\sqrt{3}$. ……………………………… 9 分

由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=48+4-2\times2\times4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=28$， ……………………………… 11 分

则 $b=2\sqrt{7}$. ……………………………………………………………………………… 12 分

18. 解：(1)记"该射击小组共射中目标 4 次"为事件 A.

则 $P(A)=(\frac{2}{3})^4\times(\frac{2}{3})^2+C_4^3(\frac{2}{3})^3\times\frac{1}{3}\times C_2^1(\frac{1}{3})\times\frac{2}{3}+C_4^2(\frac{2}{3})^2\times(\frac{1}{3})^2\times(\frac{1}{3})^2=\frac{216}{729}=\frac{8}{27}$. …… 4 分

(2) X 的可能取值为 $100,60,10,-50$， …………………………………………………… 5 分

$P(X=100)=(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$，…………………………………………………………………… 6 分

$P(X=60)=C_2^2(\frac{2}{3})^2\times\frac{2}{3}+C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$， ……………………………………… 7 分

$P(X=10)=C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$， ……………………………………………………… 8 分

$P(X=-50)=(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9}$， ………………………………………………………………… 9 分

所以 X 的分布列为

X	100	60	10	-50
P	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{1}{9}$

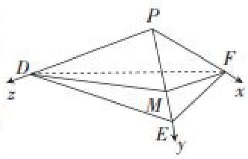
……………………………………………………………………………………… 10 分

故 X 的数学期望 $EX=100\times\frac{4}{27}+60\times\frac{4}{9}+10\times\frac{8}{27}-50\times\frac{1}{9}=\frac{350}{9}$. ………………………… 12 分

19. (1)证明：因为 $ABCD$ 是正方形，所以折起后有 $PD\perp PF$，$PE\perp PF$. ………… 2 分

又 PD，PE 交于点 P，所以 $PF\perp$平面 PDE. ……………………………… 4 分

又 $DM\subset$平面 PDE，所以 $PF\perp DM$. ………………………………………… 5 分



(2)解：如图，以 P 为原点，分别以 $\overrightarrow{PF}$，$\overrightarrow{PE}$，$\overrightarrow{PD}$ 为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $P-xyz$. 设正方形 $ABCD$ 的边长 $AB=6$，则 $PD=2PE=2PF=6$，

所以 $PM=2$，则有 $D(0,0,6)$，$M(0,2,0)$，$F(3,0,0)$. …………………………………… 7 分

平面 PDM 的一个法向量是 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$， ………………………………………………… 8 分

设平面 DMF 的法向量是 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，又有 $\overrightarrow{FM}=(-3,2,0)$，$\overrightarrow{DM}=(0,2,-6)$，

且 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FM}=-3x+2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DM}=2y-6z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(2,3,1)$. ………………………………………… 10 分

则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{1\times\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$，由图可知该二面角为锐角，故二面角 $P-DM-F$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{14}}{7}$. ………………………………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)设点 $P(x,y)$，则 $\dfrac{\sqrt{(x+\sqrt{6})^2+y^2}}{|x+\frac{4\sqrt{6}}{3}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， ……………………………………… 3 分

化简得 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………………………………… 5 分

(2)当直线 l 经过点 $(-2,1)$ 时，直线 l 与椭圆 C 相切，不符合题意. 设 $G(x_0,0)$，当直线 l 与 x 轴重合时，

$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{BF}=(-2\sqrt{2}+2)(2\sqrt{2}-x_0)+(-2\sqrt{2}-x_0)(2\sqrt{2}+2)=0$，

解得 $x_0=-4$. …… 6 分

设点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则直线 BM 的方程为 $y=\dfrac{y_1+1}{x_1+2}(x+2)-1$.

令 $y=0$，得 $x_E=\dfrac{x_1+2}{y_1+1}-2$，同理 $x_F=\dfrac{x_2+2}{y_2+1}-2$， …… 7 分

所以 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{GF}=(\dfrac{x_2+2}{y_2+1}+2)\dfrac{x_1+2}{y_1+1}=\dfrac{x_1x_2+2y_2x_1+4x_1+2x_2+4y_2+8}{(y_1+1)(y_2+1)}$，

$\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{BF}=(\dfrac{x_1+2}{y_1+1}+2)\dfrac{x_2+2}{y_2+1}=\dfrac{x_1x_2+2y_1x_2+4x_2+2x_1+4y_1+8}{(y_1+1)(y_2+1)}$. …… 9 分

设直线 l 的方程为 $x=ty-4$.

联立方程组 $\begin{cases}x=ty-4,\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得 $(t^2+4)y^2-8ty+8=0$，

则 $y_1+y_2=\dfrac{8t}{t^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{8}{t^2+4}$. …… 10 分

因为 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{BF}=\dfrac{(2t^2+4t)y_1y_2-(2t+4)(y_1+y_2)}{(y_1+1)(y_2+1)}=\dfrac{(2t^2+4t)\dfrac{8}{t^2+4}-(2t+4)\dfrac{8t}{t^2+4}}{(y_1+1)(y_2+1)}=0$，

所以存在点 $G(-4,0)$，使得 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{BF}=0$. …… 12 分

21. (1)解：因为 $f(x)=\ln(x+3)-x$，所以 $f'(x)=\dfrac{-x-2}{x+3}(x>-3)$. …… 1 分

令 $f'(x)>0$，得 $-3<x<-2$；令 $f'(x)<0$，得 $x>-2$，

所以 $f(x)$ 在 $(-3,-2)$ 上单调递增，在 $(-2,+\infty)$ 上单调递减， …… 3 分

所以 $f(x)_{\max}=f(-2)=2$. …… 4 分

(2)证明：方程 $ae^x+\ln\dfrac{a}{x+3}=3(a>0)$ 可化为 $e^{x+\ln a}+x+\ln a=x+3+\ln(x+3)=e^{\ln(x+3)}+\ln(x+3)$. …… 5 分

设 $g(x)=e^x+x$，显然 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数，又 $g(x+\ln a)=g(\ln(x+3))$，

所以有 $x+\ln a=\ln(x+3)$，即方程 $\ln(x+3)-x=\ln a$ 有两个实数根 x_1,x_2. …… 6 分

由(1)可知 $f(x)=\ln(x+3)-x\leqslant 2$，则有 $\ln a<2$，所以 a 的取值范围为 $(0,e^2)$.

因为方程 $f(x)=\ln a$ 有两个实数根 x_1,x_2，所以 $\begin{cases}\ln(x_1+3)=x_1+\ln a,\\ \ln(x_2+3)=x_2+\ln a,\end{cases}$ 则 $\dfrac{(x_1+3)-(x_2+3)}{\ln(x_1+3)-\ln(x_2+3)}=1$，要证

$e^{x_1}+e^{x_2}>\dfrac{2}{a}$，即证 $ae^{x_1}+ae^{x_2}>2$. …… 8 分

$ae^{x_1}+ae^{x_2}=e^{x_1+\ln a}+e^{x_2+\ln a}=e^{\ln(x_1+3)}+e^{\ln(x_2+3)}=x_1+x_2+6$，需证 $x_1+3+x_2+3>2$. …… 9 分

需证 $x_1+3+x_2+3>\dfrac{2(x_1+3)-2(x_2+3)}{\ln(x_1+3)-\ln(x_2+3)}$. 不妨设 $-3<x_1<x_2$，令 $t=\dfrac{x_1+3}{x_2+3}$，则 $0<t<1$，即要证 $\ln t<\dfrac{2(t-1)}{t+1}(0<t<1)$. …… 10 分

设 $h(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}(0<t<1)$，则 $h'(t)=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，所以 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数，$h(t)<h(1)=0$，即 $\ln t<\dfrac{2(t-1)}{t+1}$ 成立，故原式成立. …… 12 分

22. 解：(1)由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，解得 $A(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2})$，$B(0,1)$. …… 2 分

因为 $\rho=2\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})$，所以 $\rho^2=2\rho(\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta)$，

即 $(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2+(y-\dfrac{1}{2})^2=1$， …… 4 分

所以曲线 C 的参数方程为$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos\alpha, \\ y=\dfrac{1}{2}+\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 为参数）. ………… 5 分

(2)不妨设 $P(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos\alpha,\dfrac{1}{2}+\sin\alpha)$， ………… 6 分

则 $|PA|^2+|PB|^2$

$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+(\cos\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2+(\sin\alpha-\dfrac{1}{2})^2$

$=3+\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha$

$=3+2\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{6})$， ………… 8 分

因为 $\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{6})\in[-1,1]$，所以 $3+2\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{6})\in[1,5]$，

所以 $|PA|^2+|PB|^2$ 的取值范围是$[1,5]$. ………… 10 分

23. (1)证明：因为 $a+b+c=1$，

所以 $(a+2)^2+(b+2)^2+(c+2)^2=a^2+b^2+c^2+4(a+b+c)+12$

$=a^2+b^2+c^2+16$. ………… 1 分

所以要证 $(a+2)^2+(b+2)^2+(c+2)^2\geqslant\dfrac{49}{3}$，

只需证 $a^2+b^2+c^2\geqslant\dfrac{1}{3}$. ………… 2 分

因为 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$\geqslant(a+b+c)^2-2(a^2+b^2+c^2)$，

所以 $3(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2$. ………… 4 分

因为 $a+b+c=1$，所以 $a^2+b^2+c^2\geqslant\dfrac{1}{3}$.

所以 $(a+2)^2+(b+2)^2+(c+2)^2\geqslant\dfrac{49}{3}$. ………… 5 分

(2)解：设 $f(x)=|x-a|+|2x+1|$，则“对任意实数 x，不等式 $|x-a|+|2x+1|\geqslant\dfrac{3}{2}$ 恒成立”等价于“$f(x)_{\min}\geqslant\dfrac{3}{2}$”. ………… 6 分

当 $a<-\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=\begin{cases} -3x+a-1, x<a, \\ -x-a-1, a\leqslant x\leqslant-\dfrac{1}{2}, \\ 3x-a+1, x>-\dfrac{1}{2}, \end{cases}$ 此时 $f(x)_{\min}=f(-\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{2}-a$，

要使 $|x-a|+|2x+1|\geqslant\dfrac{3}{2}$ 恒成立，必须 $-\dfrac{1}{2}-a\geqslant\dfrac{3}{2}$，解得 $a\leqslant-2$. ………… 7 分

当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=|x+\dfrac{1}{2}|+|2x+1|=3|x+\dfrac{1}{2}|\geqslant\dfrac{3}{2}$，即 $|x+\dfrac{1}{2}|\geqslant\dfrac{1}{2}$，显然不恒成立. ………… 8 分

当 $a>-\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=\begin{cases} -3x+a-1, x<-\dfrac{1}{2}, \\ x+a+1, -\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant a, \\ 3x-a+1, x>a, \end{cases}$ 此时 $f(x)_{\min}=f(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}+a$，

要使 $|x-a|+|2x+1|\geqslant\dfrac{3}{2}$ 恒成立，必须 $\dfrac{1}{2}+a\geqslant\dfrac{3}{2}$，解得 $a\geqslant1$. ………… 9 分

综上所述，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$. ………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》