

炎德·英才大联考雅礼中学 2023 届高三月考试卷(六)

数 学

命题人:刘一波 审题人:张 鎏

得分:

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 8 页.时量 120 分钟,满分 150 分.

第 I 卷

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若复数 $(2+ai)(1+i)$ 的实部和虚部相等,则实数 a 的值为

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

2. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x - 4 \leq 0$ ”的否定为

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x - 4 \geq 1$ B. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 4 \leq 1$
C. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + 4 > 0$ D. $\exists x \notin \mathbf{R}, x^2 - 2x + 4 > 0$

3. 已知向量 $a = (k, 3), b = (1, 4), c = (2, 1)$, 且 $(2a - 3b) \perp c$, 则实数 $k =$

- A. $-\frac{9}{2}$ B. 0 C. 3 D. $\frac{15}{2}$

4. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $1 < b < a$ ”是“ $a - 1 > |b - 1|$ ”的

- A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = \sqrt{5}, BC = \sqrt{10}, \cos A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为

- A. $\frac{5}{2}$ B. 5 C. 10 D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

6. 将标号为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的 6 张卡片放入 3 个不同的信封中, 若每个信封放 2 张, 其中标号为 1, 2 的卡片放入同一信封, 则不同的方法共有

- A. 12 种 B. 18 种 C. 36 种 D. 54 种

7. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , O 为坐标原点. 以 $F_1 F_2$ 为直径的圆与双曲线的右支交于 P 点, 且以 OF_2 为直径的圆与直线 PF_1 相切, 若 $|PF_1| = 8$, 则双曲线的焦距等于

- A. $6\sqrt{2}$ B. 6 C. $3\sqrt{2}$ D. 3

数字试题(雅礼版) 第 1 页(共 8 页)

8. 已知 m, n 为实数, $f(x) = e^x - mx + n - 1$, 若 $f(x) \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 $\frac{n}{m}$ 的最小值是

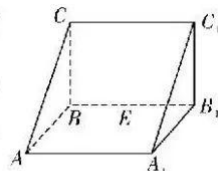
A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 a, b, c 满足 $c < b < a$ 且 $ac < 0$, 则下列不等式恒成立的是

A. $\frac{b}{a} > \frac{c}{a}$ B. $\frac{b-a}{c} > 0$
C. $\frac{b^2}{c} > \frac{a^2}{c}$ D. $\frac{a-c}{ac} < 0$

10. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 ABC , $AA_1 = 2$, $AB = BC = 1$, $\angle ABC = 90^\circ$, 三棱柱外接球的球心为 O , 点 E 是侧棱 BB_1 上的一个动点, 下列判断正确的是



A. 直线 AC 与直线 C_1E 是异面直线
B. A_1E 一定不垂直于 AC_1
C. 三棱锥 $E-AA_1O$ 的体积为定值
D. $AE + EC_1$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$

11. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在导函数 $f'(x)$, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 有 $f(x) + f(-x) = x^2$, 且在 $[0, +\infty)$ 上 $f'(x) > x$, 若 $f(2-a) + 2a > f(a) + 2$, 则实数 a 的可能取值为

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

12. 已知直线 $l: \cos \theta \cdot x + \sin \theta \cdot y + 3\sin \theta + \cos \theta - 5 = 0$, 则下列说法正确的是

A. 直线 l 一定不过原点
B. 存在定点 P , 使得点 P 到直线 l 的距离为定值
C. 点 $M(0, -3)$ 到直线 l 的最小值为 $2\sqrt{6} - 3$
D. 若直线 l 分别与 x 轴, y 轴交于 A, B 两点, 则 $\triangle AOB$ 的周长可以等于 12

答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	得分
答案													

第Ⅱ卷

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(2-x)(1-3x)^4$ 的展开式中， x^2 的系数等于_____. (用数字作答)

14. 点 $M(3, 2)$ 到抛物线 $C: y = ax^2 (a > 0)$ 准线的距离为 4，则实数 $a =$ _____.

15. 若正整数 m 满足 $10^{m-1} < 2^{512} < 10^m$ ，则 $m =$ _____. ($\lg 2 \approx 0.3010$)

16. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 3$ ， $\sin B = m \cdot \sin A (m \geq 2)$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积最大值为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数， S_n 为其前 n 项和，对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ，满足关系 $S_n = 2a_n - 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，且 $b_n = \frac{1}{(\log_2 a_n)^2}$ ，求证：当 $n \geq 4$ 时，

$$\text{总有 } T_n < \frac{61}{36}.$$



18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$, $g(x) = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$.

(1) 设直线 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴, 求 $g(x_0)$ 的值;

(2) 求函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 的单调递增区间.

答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	得分
答案													

第 II 卷

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $(2-x)(1-3x)^4$ 的展开式中, x^2 的系数等于_____. (用数字作答)

14. 点 $M(3, 2)$ 到抛物线 $C: y = ax^2 (a > 0)$ 准线的距离为 4, 则实数 $a =$ _____.

15. 若正整数 m 满足 $10^{m-1} < 2^{512} < 10^m$, 则 $m =$ _____. ($\lg 2 \approx 0.3010$)

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3$, $\sin B = m \cdot \sin A (m \geq 2)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积最大值为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, S_n 为其前 n 项和, 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 满足关系 $S_n = 2a_n - 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $b_n = \frac{1}{(\log_2 a_n)^2}$, 求证: 当 $n \geq 4$ 时,

$$\text{总有 } T_n < \frac{61}{36}.$$

18. (本小题满分 12 分)

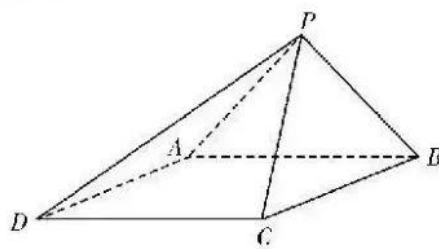
已知函数 $f(x) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$, $g(x) = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$.

- (1) 设直线 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴, 求 $g(x_0)$ 的值;
- (2) 求函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 的单调递增区间.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle ABC = 60^\circ$, $PA \perp PB$, $PC = 2$.

- (1) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$;
- (2) 若 $PA = PB$, 求二面角 $A-PC-D$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

为贯彻中共中央、国务院 2023 年一号文件,某单位在当地定点帮扶某村种植一种草莓,并把这种露天种植的草莓搬到了大棚里,收到了很好的经济效益.根据资料显示,产出的草莓的箱数 x (单位:箱)与成本 y (单位:千元)的关系如下:

x	1	3	4	6	7
y	5	6.5	7	7.5	8

y 与 x 可用回归方程 $\hat{y} = \hat{b} \lg x + \hat{a}$ (其中 $\hat{a}, \hat{b}$ 为常数)进行模拟.

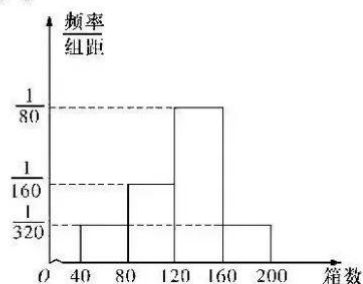
(1)若农户卖出的该草莓的价格为 150 元/箱,试预测该水果 100 箱的利润是多少元.(利润=售价-成本)

(2)据统计,1 月份的连续 16 天中农户每天为甲地可配送的该水果的箱数的频率分布直方图如图,用这 16 天的情况来估计相应的概率.一个运输户拟购置 n 辆小货车专门运输农户为甲地配送的该水果,一辆货车每天只能运营一趟,每辆车每趟最多只能装载 40 箱该水果,满载发车,否则不发车.若发车,则每辆车每趟可获利 500 元;若未发车,则每辆车每天平均亏损 200 元.试比较 $n=3$ 和 $n=4$ 时,此项业务每天的利润平均值的大小.

参考数据与公式:设 $t = \lg x$, 则

$\bar{t}$	$\bar{y}$	$\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2$
0.54	6.8	1.53	0.45

$$\text{线性回归直线 } \hat{y} = \hat{b} \lg x + \hat{a} \text{ 中, } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{t}.$$

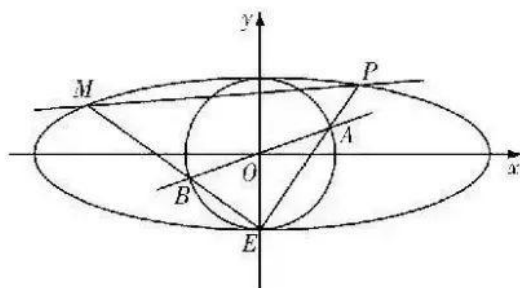


21. (本小题满分 12 分)

如图, 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 = b^2$, 已知圆 C_2 将椭圆 C_1 的长轴三等分, 椭圆 C_1 右焦点到右顶点的距离为 $3 - 2\sqrt{2}$, 椭圆 C_1 的下顶点为 E , 过坐标原点 O 且与坐标轴不重合的任意直线 l 与圆 C_2 相交于点 A, B .

(1) 求椭圆 C_1 的方程;

(2) 若直线 EA, EB 分别与椭圆 C_1 相交于另一个交点为点 P, M . 求证: 直线 PM 经过定点.



22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - ax, g(x) = \ln x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求证: $f(x) \geq x \cdot g(x)$;

(2) 设 $r(x) = f(x) + g\left(\frac{1+ax}{2}\right)$, 若对任意的 $a \in (1, 2)$, 总存在 $x_0 \in$

$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 使不等式 $r(x_0) > k(1 - a^2)$ 成立, 求实数 k 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线