

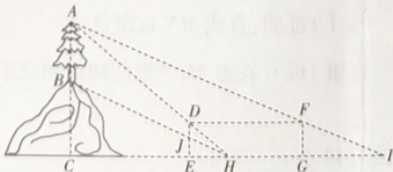
数 学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z = \frac{5}{2+i}$ ，则其共轭复数 $\bar{z} =$
 A. $2+i$ B. $2-i$ C. $10+5i$ D. $10-5i$
2. 已知集合 $A = \{x | 2x - 1 \leq 0\}$ ， $B = \{x | \frac{1}{x} > 1\}$ ，则 $A \cap B =$
 A. \emptyset B. $\{x | 0 < x \leq \frac{1}{2}\}$
 C. $\{x | \frac{1}{2} \leq x < 1\}$ D. $\{x | x > 1\}$
3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 + a_4 = 32$ ， $a_6 + a_8 = 16$ ，则 $a_{10} + a_{12} + a_{14} + a_{16} =$
 A. 8 B. 10 C. 12 D. 14
4. 魏晋时期刘徽撰写的《海岛算经》是关于测量的数学著作，其中有一题是测量海岛上松树的高。如图，点 E, H, G 在水平线 CI 上， DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度， DE 与 BH 交于点 J ，则松树的高度 $AB =$
 A. $\frac{GI - EH}{DJ \times EG} - EG$
 B. $\frac{GI - EH}{DJ \times EG} + EG$
 C. $\frac{DJ \times EG}{GI - EH} - DJ$
 D. $\frac{DJ \times EG}{GI - EH} + DJ$



5. 已知 F_1, F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的两个焦点， P 为椭圆上一点且 $|PF_1| = 2|PF_2|$ ，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为
 A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{15}$ C. 4 D. $\sqrt{17}$

6. 如图是一个圆台形的水杯，圆台的母线长为 12 cm，上、下底面的半径分别为 4 cm 和 2 cm。为了防烫和防滑，该水杯配有一个皮革杯套，包裹住水杯 $\frac{2}{3}$ 高度以下的外壁和杯底，水杯和杯套的厚度忽略不计，则此杯套使用的皮革的面积为



- A. $38\pi \text{ cm}^2$ B. $\frac{124\pi}{3} \text{ cm}^2$
 C. $\frac{140\pi}{3} \text{ cm}^2$ D. $48\pi \text{ cm}^2$

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点为 A ，右焦点为 $F(c, 0)$ ，过点 A 的直线 l 与圆 $(x - c)^2 + y^2 = (c - a)^2$ 相切，与 C 交于另一点 B ，且 $\angle BAF = \frac{\pi}{6}$ ，则 C 的离心率为
 A. 3 B. $\frac{5}{2}$ C. 2 D. $\frac{3}{2}$

8. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ ，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 上的最小值为
 A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ C. 3 D. 4

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 某上市科技公司 2022 年各业务板块的营收和净利润分别占公司总营收和总净利润的比例如下表：

	智能手机	生活消费产品	互联网服务	其他
营收占比	60.2%	28.2%	9.9%	1.7%
净利润占比	67.3%	23.4%	9.9%	-0.6%

- 已知该公司 2022 年总体的净利润率为 5% (净利润率 = $\frac{\text{净利润}}{\text{营收}}$)，则该公司 2022 年
- A. 营收和净利润大部分来自“智能手机”板块
 - B. 各业务板块均有盈利
 - C. “互联网服务”板块的净利润率为 5%
 - D. “生活消费产品”板块的净利润率小于 3%
10. 已知 $m > n > 0$ ，则
 A. $\sqrt{m^2 + m} > \sqrt{n^2 + n}$ B. $m - n > \sin m - \sin n$
 C. $|\ln m| > |\ln n|$ D. $\frac{e^m - e^n}{m + n} > m - n$
11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ， $f(2x - 1)$ 是偶函数，函数 $g(x) = (x + 1)f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递增，则
 A. $f(2x - 1) = f(1 - 2x)$ B. $g(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增
 C. 若 $f(a) > f(b)$ ，则 $|g(a)| > |g(b)|$ D. 若 $g(a) + g(b) > 0$ ，则 $a + b + 2 > 0$

12. 在四面体 $ABCD$ 中, $AB = CD = 1, AC = AD = BC = BD = 2, E, F, G$ 分别是棱 BC, AC, AD 上的动点, 且满足 AB, CD 均与面 EFG 平行, 则

- A. 直线 AB 与平面 ACD 所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{15}$
 B. 四面体 $ABCD$ 被平面 EFG 所截得的截面周长为定值 1
 C. $\triangle EFG$ 的面积的最大值为 $\frac{1}{8}$
 D. 四面体 $ABCD$ 的内切球的表面积为 $\frac{7\pi}{30}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $\vec{OA} = (2, 3), \vec{OB} = (3, t)$, 且 $|\vec{AB}| = 1$, 则实数 $t =$ _____.

14. $(2x + \frac{y}{x})^6$ 的展开式中不含 x 的项的系数是 _____.

15. 若对任意 $a \in [2, 3]$, 关于 x 的方程 $\log_a x = b - x$ 在区间 $[2, 3]$ 上总有实根, 则实数 b 的取值范围是 _____.

16. 给如图所示的 1~9 号方格进行涂色, 规则是: 任选一个格子开始涂色, 之后每次随机选一个未涂色且与上次所涂方格不相邻(即没有公共边)的格子进行涂色, 当 5 号格子被涂色后停止涂色, 记此时已被涂色的格子数为 X , 则 $P(X=3) =$ _____.

1	2	3
4		6
	8	9

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 且 $f(x)$ 的图象的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$.

(I) 求 $f(x)$ 的解析式;

(II) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $A = \frac{\pi}{3}, a = f(A)$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{12}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (12 分)

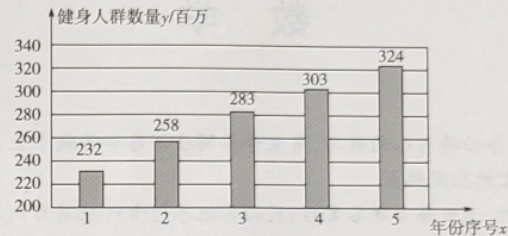
记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_n = 2(a_n - 2^n + 1)$.

(I) 证明: 数列 $\{\frac{a_n}{2^n}\}$ 是等差数列;

(II) 设 k 为实数, 且对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 总有 $k > \frac{S_n - 2}{a_n}$, 求 k 的最小值.

19. (12 分)

为促进全民健身更高水平发展, 更好地满足人民群众的健身和健康需求, 国家相关部门制定了《全民健身计划(2021—2025 年)》. 相关机构统计了我国 2018 年至 2022 年(2018 年的年份序号为 1, 依此类推)健身人群数量(即有健身习惯的人数, 单位: 百万), 所得数据如图所示:



(I) 若每年健身人群中放弃健身习惯的人数忽略不计, 从 2022 年的健身人群中随机抽取 5 人, 设其中从 2018 年开始就有健身习惯的人数为 X , 求 EX ;

(II) 由图可知, 我国健身人群数量与年份序号线性相关, 请用相关系数加以说明.

附: 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$

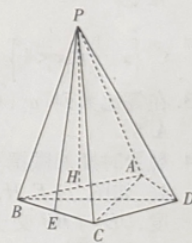
参考数据: $\bar{y} = 280, \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 55, \sum_{i=1}^5 y_i^2 = 397262, \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 4429, \sqrt{52620} \approx 229.4$.

20. (12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的顶点 P 在底面 $ABCD$ 上的射影为 AB 的中点 H , $\triangle ABC$ 为等边三角形, $AD = DC, AD \perp DC$, 棱 BC 的中点为 E .

(I) 证明: $BD \perp PE$;

(II) 若 $PH = 2AD$, 求直线 PE 与平面 PBD 所成角的正弦值.



21. (12 分)

设 O 为坐标原点, 点 M, N 在抛物线 $C: x^2 = 4y$ 上, 且 $\vec{OM} \cdot \vec{ON} = -4$.

(I) 证明: 直线 MN 过定点;

(II) 设 C 在点 M, N 处的切线相交于点 P , 求 $\frac{|MN|}{|OP|^2}$ 的取值范围.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x + x^2 - 3x + 2$.

(I) 求 $f(x)$ 的极值;

(II) 若函数 $g(x) = f(x) + (3-m)x$ 至少有两个不同的零点, 求实数 m 的最小值.