海南中学、海口一中、文昌中学、嘉积中学四校联合考试试题卷

时间：120 分钟　　满分：150 分

注意事项：

1．答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡相应位置上。

2．选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3．非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

第I卷（选择题）

1. B　2.A　3.B　4.D　5.B　6.D　7.A

8. C

【详解】由题意知$a>0$，$b>0$，$c>0$，

由$\frac{lna}{e^a}=\frac{lnb}{b}=-\frac{lnc}{c}$，得 $0<a<1$，$0<b<1$，$c>1$

设$f(x)=\frac{lnx}{x}(x>0)$，则$f'(x)=\frac{1-lnx}{x^2}$，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

因为$e^x\geq x+1$，当且仅当$x=0$ 时取等号，故$e^a>a(0<a<1)$，

所以$\frac{lna}{e^a}>\frac{lna}{a}$，故$\frac{lnb}{b}>\frac{lna}{a}$，所以$f(a)>f(b)$,则$b>a$, 即有

$0<a<b<1<c$，故选 C.

9. BC　10.BD　11.ABD

12.ACD

【详解】解：对选项 A，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的有唯一交点（0，1），即存在 $x_0=0$，满足 $f(0)=g(0)=1$ 且 $f'(0)=g'(0)=1$，A 选项正确；对选项 B，函数 $f(x)=\ln x$ 与 $g(x)=x-2$ 有两个交点，但在两个交点处的导数不相等，B 错误；对选项 C，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有两个交点，但函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在两个交点处的导数不相等，C 正确；对选项 D，$f(x_0)=g(x_0)$，得 $ax_0^{\ 2}-1=\ln x_0$，$f'(x_0)=g'(x_0)$ 得 $2ax_0=\frac{1}{x_0}$，

则 $x_0^{\ 2}=\frac{1}{2a}$，所以 $\ln x_0=-\frac{1}{2}$，$x_0^{\ 2}=\frac{1}{e}$，所以 $a=\frac{e}{2}$.故选：ACD.

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.把答案填在答题卡的相应位置.

13.24　14. −2　15. $\frac{9\pi}{2}$

16. 3，$(0，20)$

【详解】由题意得：$c^2=9+16=25$，故$|F_1F_2|=2c=10$，设点$I(x_1,y_1)$，且I在F_1F_2上垂足为H，根据双曲线定义及切线长定理可得：$|PF_1|-|PF_2|=2a=|HF_1|-|HF_2|$，又因为$|HF_1|+|HF_2|=2c$，解得：$|HF_1|=a+c$，所以点$H$坐标为$(a,0)$，所以点$H$的横坐标为 3. 记渐近线$y=\frac{4}{3}x$的倾斜角为$\theta$，则$\tan\theta=\frac{4}{3}$，记$\angle IF_2H=\alpha$，则$2\alpha\in(0,\pi-\theta)$，

所以$\alpha<\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$，即$\tan\alpha<\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$，又$\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\tan\theta=\frac{4}{3}$，解得：$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$(负值舍)，所以$\tan\alpha\in(0,2)$，则$y_1=|HF_2|\tan\alpha\in(0,4)$，所以

$S_{\Delta IF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot y_1=5y_1=5y_1\in(0,20)$.故答案为：$(0,20)$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17（本小题满分 10 分）. ΔABC的内角A，B，C分别为a，b，c. 已知$\sin(A+C)=8\sin^2\frac{B}{2}$.

（1）求$\cos B$；

（2）从下列①②③中选择两个作为条件，证明另外一个条件成立：

①$b=2$；②$S_{\Delta ABC}=2$；③$a+c=6$.

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.

【详解】（1）

解法 1：由$A+B+C=\pi$，$\sin(A+C)=8\sin^2\frac{B}{2}$得$\sin B=8\sin^2\frac{B}{2}$，.....1 分

$2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=8\sin^2\frac{B}{2}$，所以$\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{4}$，$\tan B=\frac{2\tan\frac{B}{2}}{1-\tan^2\frac{B}{2}}=\frac{8}{15}$，....3 分

因为 $0<B<\pi$，......................................4 分

所以 $\cos B=\dfrac{15}{17}$ ……………………………………………………………………………5 分

解法 2：由 $A+B+C=\pi$， $\sin(A+C)=8\sin^2\dfrac{B}{2}$ 得 $\sin B=8\sin^2\dfrac{B}{2}$，……1 分

故 $\sin B=4(1-\cos B)$，上式平方，整理得 $17\cos^2 B-32\cos B+15=0$，..3 分

因为 $0<B<\pi$，…………………………………………………4 分

所以 $\cos B=\dfrac{15}{17}$， $\cos B=1$（舍去）……………………………………………5 分

【详解】（2）若选择①③

因为 $\cos B=\dfrac{15}{17}$，所以 $\sin B=\dfrac{8}{17}$， $b=2$， $a+c=6$

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$，得 $(a+c)^2-2ac-2ac\cdot\dfrac{15}{17}=4$，……7 分

故 $ac=\dfrac{17}{2}$，……………………………………………………8 分

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{17}{2}\cdot\dfrac{8}{17}=2$…………………………………10 分

若选择①②

因为 $\cos B=\dfrac{15}{17}$，所以 $\sin B=\dfrac{8}{17}$，

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot ac\cdot\dfrac{8}{17}=2$，所以 $ac=\dfrac{17}{2}$ ……………………………8 分

$b=2$，由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$，得 $(a+c)^2-2ac-2ac\cdot\dfrac{15}{17}=4$，…9 分

故 $a+c=6$ ……………………………………………………………………10 分

若选择②③

因为 $\cos B=\dfrac{15}{17}$，所以 $\sin B=\dfrac{8}{17}$，

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot ac\cdot\dfrac{8}{17}=2$，……………………………………………7 分

由余弦定理及 $a+c=6$ 得

$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B=(a+c)^2-2ac\cdot(1+\cos B)=36-2\times\dfrac{17}{2}\times(1+\dfrac{15}{17})=4$……4 分

故 $b=2$ ……………………………………………………………………………10 分

18（本小题满分 12 分）．等差数列$\{a_n\}(n\in N^*)$中，a_1，a_2，a_3分别是下表第一、二、三行中的某一个数，且其中的任何两个数不在下表的同一列．

	第一列	第二列	第三列
第一行	5	8	2
第二行	4	3	12
第三行	16	6	9

(1)请选择一个可能的$\{a_1，a_2，a_3\}$组合，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)记(1)中您所选的数列$\{a_n\}$前n项和为S_n，判断是否存在正整数k，使得a_1，a_k，S_{k+2}成等比数列，若有，请求出k的值；若没有，请说明理由．

【详解】(1)

由题意可知：有两种组合满足条件：

①$a_1=8$，$a_2=12$，$a_3=16$，..2 分（不单独给一项分）

此时等差数列$\{a_n\}$中$a_1=8$，公差$d=4$，..3 分

所以其通项公式为$a_n=8+4(n-1)=4n+4$．..................................5 分

②$a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=6$，此时等差数列$\{a_n\}$中$a_1=2$，公差$d=2$，....2 分

所以其通项公式为$a_n=2+2(n-1)=2n$．..5 分

(2)若选择①，不存在，理由如下：..6 分

$S_n=\frac{n(8+4n+4)}{2}=2n^2+6n$．...7 分

则$S_{k+2}=2(k+2)^2+6(k+2)=2k^2+14k+20$．....................................8 分

若a_1，a_k，S_{k+2}成等比数列，则${a_k}^2=a_1\cdot S_{k+2}$，.......................................9 分

即$(4k+4)^2=8(2k^2+14k+20)$，整理得$k^2+2k+1=k^2+7k+10$，

即 $5k=-9$，$k\notin N^*$..11 分

此方程无正整数解，故不存在正整数k，使a_1，a_k，S_{k+2}成等比数列．.....12 分

若选择②，存在，理由如下：..6 分

$S_n=\frac{n(2+2n)}{2}=n^2+n$，...7 分

则$S_{k+2}=(k+2)^2+(k+2)=k^2+5k+6$，...8 分

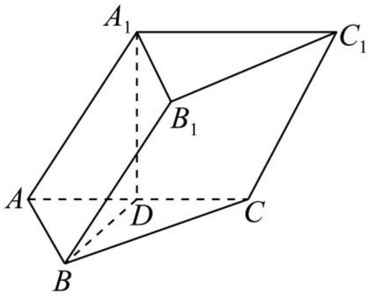
若a_1，a_k，S_{k+2}成等比数列，则${a_k}^2=a_1\cdot S_{k+2}$，.......................................9 分

即$(2k)^2=2(k^2+5k+6)$，整理得$k^2-5k-6=0$，因为k为正整数，

所以$k=6$． ....11 分

故存在正整数$k=6$，使a_1，a_k，S_{k+2}成等比数列． ....12 分

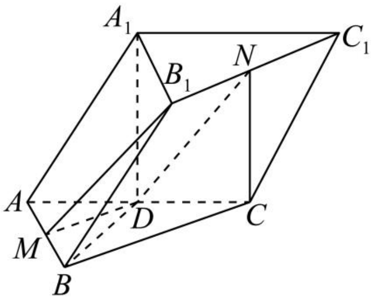
19（本小题满分 12 分）．如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，底面ABC是以AC为斜边的等腰直角三角形，侧面AA_1C_1C为菱形，点A_1在底面上的投影为AC的中点D，且$AB=2$．



(1)若M、N分别为棱AB、B_1C_1的中点，求证：$B_1M\parallel$平面CDN；

(2)E为A_1B_1的中点，求直线DE与侧面AA_1B_1B所成角的正弦值.

【详解】（1）证明：连接MD，$\because M$为AB的中点，D为AC的中点，$\therefore MD\parallel BC$且$2|MD|=|BC|$，.......................1 分



N为B_1C_1的中点，

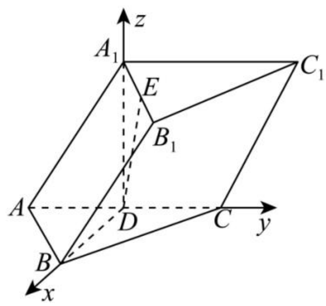
则在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\therefore B_1N\parallel BC$且$2|B_1N|=|BC|$，.....2 分

$\therefore MD\parallel B_1N$且$|MD|=|B_1N|$，$\therefore$四边形$B_1NDM$为平行四边形，..........................3 分

$\therefore B_1M\parallel ND$，...4 分

$\because ND\subset$平面 CDN，且$B_1M\not\subset$平面 CDN，$\therefore B_1M\parallel$平面CDN ....5 分

（2）易得$AC\perp BD$，连接DB、DA_1,以D为坐标原点，DB、DC、DA_1所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系如图所示：



则$D(0,0,0)$，$A(0,-\sqrt{2},0)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{6})$，

$B_1(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{6})$，$E\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{6}\right)$..........................2 分

则$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,\sqrt{2},\sqrt{6})$，$\overrightarrow{DE}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{6}\right)$.......3 分

设平面AA_1B_1B的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0\\ \overrightarrow{AA_1}\cdot\vec{n}=\sqrt{2}y+\sqrt{6}z=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x+y=0\\ y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

取$z=1$，则$\vec{n}=\left(\sqrt{3},-\sqrt{3},1\right)$. . . . . 4 分

设直线DE到和侧面AA_1B_1B所成角为θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{DE},\vec{n}\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{DE}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}+\sqrt{6}\right|}{\left|\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}\right|}=\frac{\sqrt{6}}{7}$$. . . . . 6 分

所以直线 DE 与侧面AA_1B_1B所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{7}$..................................7 分

20.（本小题满分 12 分）

某地 A，B，C，D 四个商场均销售同一型号的冰箱，经统计，2022 年 10 月份这四个商场购进和销售该型号冰箱的台数如下表（单位：十台）：

	A 商场	B 商场	C 商场	D 商场
购进该型冰箱数 x	3	4	5	6
销售该型冰箱数 y	2.5	3	4	4.5

（1）已知可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系，求 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；

（2）假设每台冰箱的售价均定为 4000 元．若进入 A 商场的甲、乙两位顾客购买这种冰箱的概率分别为 p，$2p-1\left(\frac{1}{2}<p<1\right)$，且甲乙是否购买冰箱互不影响，若两人购买冰箱总金额的期望不超过 6000 元，求 p 的取值范围．

参考公式：$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}$．

解：（1）

$\overline{x}=\frac{3+4+5+6}{4}=4.5$，

$\overline{y}=\frac{2.5+3+4+4.5}{4}=3.5$，..1 分

$\sum_{i=1}^{4}x_iy_i=3\times2.5+4\times3+5\times4+6\times4.5=66.5$， $\sum_{i=1}^{4}x_i^2=3^2+4^2+5^2+6^2=86$，

所以，$\hat{b}=\dfrac{66.5-4\times4.5\times3.5}{86-4\times4.5^2}=0.7$ ....3 分

则 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=3.5-0.7\times4.5=0.35$． . . . . 4 分

故 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.7x+0.35$． . . . . 5 分

（2）设甲、乙两人中选择购买这种冰箱的人数为 X，则 X 的所有可能取值为 0，1，2．...6 分

$P(X=0)=(1-p)(2-2p)=2p^2-4p+2$，

$P(X=1)=(1-p)(2p-1)+p(2-2p)=-4p^2+5p-1$，

$P(X=2)=p(2p-1)=2p^2-p$．

所以，X 的分布列为

X	0	1	2
P	$2p^2-4p+2$	$-4p^2+5p-1$	$2p^2-p$

所以，$E(X)=0\times(2p^2-4p+2)+1\times(-4p^2+5p-1)+2\times(2p^2-p)=3p-1$，...9 分

$E(4000X)=4000(3p-1)$．令 $E(4000X)\leqslant6000$，

即 $4000(3p-1)\leqslant6000$，. . . . . 10 分

解得 $p\leqslant\dfrac{5}{6}$，又 $\dfrac{1}{2}<p<1$，所以 $\dfrac{1}{2}<p\leqslant\dfrac{5}{6}$，

所以 p 的取值范围为 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{6}\right]$． . . . . 12 分

法二：记甲购买冰箱的期望为 $E(X)$，乙购买冰箱的期望为 $E(Y)$，则 $E(X)=4000p$，$E(Y)=4000(2p-1)$，$E(X)+E(Y)=4000(3p-1)\leqslant6000$，$p\leqslant\dfrac{5}{6}$．又已知 $\dfrac{1}{2}<p<1$，则 p 的取值范围为 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{6}\right]$．

21. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的离心率为$\frac{1}{2}$，椭圆的右焦点$F(1,0)$

（1）求椭圆C的方程；

（2）A、B是椭圆的左、右顶点，过点F且斜率不为0的直线交椭圆C于点M、N，直线AM与直线$x=4$交于点P．记PA、PF、BN的斜率分别为k_1、k_2、k_3，是否存在实数λ，使得$k_1+k_3=\lambda k_2$？

【详解】(1) 由题意可得$c=1$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore a=2$，故$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，

因此，椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ....4 分

【详解】(2) 设$M\left(x_1,y_1\right)$、$N\left(x_2,y_2\right)$，设直线MN的方程为$x=my+1$，其中$m\neq 0$，

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ x=my+1\end{cases}$，得$\left(3m^2+4\right)y^2+6my-9=0$，$\Delta=36m^2+36\left(3m^2+4\right)>0$，

由韦达定理可得$y_1+y_2=-\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$，. . . . . 6 分

所以$my_1y_2=\dfrac{3}{2}\left(y_1+y_2\right)$，易知点$A\left(-2,0\right)$、$B\left(2,0\right)$，$k_1=\dfrac{y_1}{my_1+3}$，

所以，直线AM的方程为$y=\dfrac{y_1}{my_1+3}\left(x+2\right)$，

将$x=4$代入直线AM的方程可得$y=\dfrac{6y_1}{my_1+3}$，即点$\left(4,\dfrac{6y_1}{my_1+3}\right)$，

$$k_2=\frac{\frac{6y_1}{my_1+3}}{3}=\frac{2y_1}{my_1+3}，\quad k_3=\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{y_2}{my_2-1}，$$

所以，$k_1+k_3=\dfrac{y_1}{my_1+3}+\dfrac{y_2}{my_2-1}=\dfrac{2my_1y_2-y_1+3y_2}{\left(my_1+3\right)\left(my_2-1\right)}$，. 9 分

所以，$\lambda=\dfrac{k_1+k_3}{k_2}=\dfrac{2my_1y_2-y_1+3y_2}{\left(my_1+3\right)\left(my_2-1\right)}\cdot\dfrac{my_1+3}{2y_1}=\dfrac{2my_1y_2-y_1+3y_2}{2my_1y_2-2y_1}=\dfrac{2y_1+6y_2}{y_1+3y_2}=2$

....12 分

22. 已知实数 $a>0$，函数 $f(x)=x\ln a-a\ln x+(x-\mathrm{e})^2$，e是自然对数的底数.

（1）当 $a=\mathrm{e}$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）求证：$f(x)$ 存在极值点 x_0，并求 x_0 的最小值.

【详解】（1）当 $a=\mathrm{e}$ 时，$f(x)=x-\mathrm{e}\ln x+(x-\mathrm{e})^2$，

则 $f'(x)=1-\dfrac{\mathrm{e}}{x}+2(x-\mathrm{e})=\dfrac{2x^2+(1-2\mathrm{e})x-\mathrm{e}}{x}=\dfrac{(2x+1)(x-\mathrm{e})}{x},(x>0)$ ....2 分

令 $f'(x)>0$，得 $x>\mathrm{e}$；令 $f'(x)<0$，得 $x<\mathrm{e}$；所以，函数 $y=g(x)$ 的单调增区间为 $(\mathrm{e},+\infty)$，单调减区间为 $(0,\mathrm{e})$. ....4 分

【详解】（2）$f'(x)=\ln a-\dfrac{a}{x}+2(x-\mathrm{e})=\dfrac{2x^2+(\ln a-2\mathrm{e})x-a}{x}$，令

$t(x)=2x^2+(\ln a-2\mathrm{e})x-a=0$，因为 $\Delta=(\ln a-2\mathrm{e})^2+8a>0$，所以方程

$2x^2+(\ln a-2\mathrm{e})x-a=0$，有两个不相等的实根 $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$，又因为

$x_1x_2=-\dfrac{a}{2}<0$，所以 $x_1<0<x_2$，令 $x_0=x_2$，列表如下：

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	减	极小值	增

所以 $f(x)$ 存在极值点 x_0.所以存在 x_0 使得 $2{x_0}^2+(\ln a-2\mathrm{e})x_0-a=0$ 成立，........7 分

所以存在 x_0 使得 $2{x_0}^2-2ex_0=a-x_0lna$，

所以存在 x_0 使得 $a-x_0lna=2{x_0}^2-2ex_0$，..8 分

对任意的 $a>0$ 有解，因此需要讨论等式左边的关于 a 的函数，

记 $u(t)=t-x_0\ln t$，所以 $u'(t)=1-\dfrac{x_0}{t}$，当 $0<t<x_0$ 时，$u'(t)<0,u(t)$ 单调递减；

当 $t>x_0$ 时，$u'(t)>0,u(t)$ 单调递增．所以当 $t=x_0$ 时，$u(t)=t-x_0\ln t$ 的最小值为

$u\left(x_0\right)=x_0-x_0\ln x_0$．所以需要 $2x_0^2-2ex_0=a-x_0\ln a\geq x_0-x_0\ln x_0$，.......9 分

即需要 $2{x_0}^2-(2e+1)x_0+x_0\ln x_0\geq 0$，即需要 $2x_0-(2e+1)+\ln x_0\geq 0$，

即需要 $2x_0+\ln x_0-(2e+1)\geq 0$

因为 $v(t)=2t+\ln t-(2e+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $v\left(x_0\right)\geq v(e)=0$，

所以需要 $x_0\geq e$，故 x_0 的最小值是 e． ....12 分