华大新高考联盟2019届高三4月教学质量测评

文科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.C　2.A　3.D　4.A　5.C　6.C　7.C　8.C　9.B　10.A　11.A　12.C

二、填空题

13.-27　14.4　15.$\frac{1}{4}$　16.$\left(0,\frac{1}{e^2}\right]$

三、解答题

17.解:(Ⅰ)因为$\frac{a\cos B+b\cos A+2c\cos A\cos B}{2}=c\sin A\sin B$,

所以$a\cos B+b\cos A+2c\cos A\cos B=2c\sin A\sin B$.

所以$a\cos B+b\cos A=2c\sin A\sin B-2c\cos A\cos B$.

所以$a\cos B+b\cos A=-2c\cos(A+B)$. ………… 1分

所以$a\cos B+b\cos A=2c\cos C$. ………… 2分

所以由正弦定理得$\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos C$. ………… 3分

所以$\sin(A+B)=2\sin C\cos C$.

所以$\sin C=2\sin C\cos C$. ………… 4分

因为$C\in(0,\pi)$,所以$\sin C\neq 0$.所以$\cos C=\frac{1}{2}$. ………… 5分

所以$C=\frac{\pi}{3}$. ………… 6分

(Ⅱ)因为$\triangle ABC$的面积为$2\sqrt{3}$,$c=2\sqrt{3}$,

所以$\triangle ABC$的面积为$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$,解得$ab=8$. ………… 8分

由余弦定理得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-2ab-2ab\cos\frac{\pi}{3}=(a+b)^2-3ab$. ………… 10分

即$(2\sqrt{3})^2=(a+b)^2-3\times 8$,解得$a+b=6$. ………… 11分

所以$\triangle ABC$的周长为$a+b+c=6+2\sqrt{3}$. ………… 12分

18.解:(Ⅰ)连接OB,BD,由题目可知四边形$OBCD$为正方形,所以$BD\perp OC$. ………… 1分

因为$PA=PD$,AD的中点是O,所以$PO\perp AD$. ………… 2分

因为平面$PAD\perp$平面$ABCD$,平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$,PO在平面PAD内,$PO\perp AD$,

所以$PO\perp$平面$ABCD$. ………… 3分

所以$PO\perp BD$.

又因为$OC\cap PO=O$,所以$BD\perp$平面POC. ………… 4分

因为AD,AB的中点分别是O,G,所以$GO\parallel BD$. ………… 5分

所以$GO\perp$平面POC. ………… 6分

(Ⅱ)因为$AD=2BC=2CD=4$,$PA=PD=2\sqrt{2}$,所以$PO=OA=OB=OD=2$,$OG=\sqrt{2}$.

所以$PG=\sqrt{OG^2+PO^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}$.

过点G作$GH\perp OA$于点H,易知$GH=1$,则$DG=\sqrt{(2+1)^2+1^2}=\sqrt{10}$, ………… 8分

所以在$\triangle PDG$中,由余弦定理得$\cos\angle DPG=\frac{(\sqrt{6})^2+(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{10})^2}{2\times\sqrt{6}\times 2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$,

则 $\sin\angle DPG=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{33}}{6}$. 则 $S_{\triangle DPG}=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{33}}{6}=\sqrt{11}$. …………………… 10 分

设点 O 到平面 PDG 的距离为 h，则

由 $V_{三棱锥G-DPO}=V_{三棱锥O-DPG}$，得 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times1=\frac{1}{3}\times S_{\triangle PDG}\times h$，

即 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times1=\frac{1}{3}\times\sqrt{11}\times h$，解得 $h=\frac{2\sqrt{11}}{11}$.

即点 O 到平面 PDG 的距离为 $\frac{2\sqrt{11}}{11}$. …………………………………………………………………… 12 分

19. 解：(Ⅰ)依题中的数据可得：$\overline{x}_{甲}=\frac{1}{5}(64+72+86+98+120)=88$， ………………………………… 1 分

$\overline{x}_{乙}=\frac{1}{5}(60+76+90+92+122)=88$. ……………………………………………………………… 2 分

$s_{甲}^2=\frac{1}{5}[(64-88)^2+(72-88)^2+(86-88)^2+(98-88)^2+(120-88)^2]$

$=\frac{1}{5}(576+256+4+100+1024)=392$； …………………………………………………………… 3 分

$s_{乙}^2=\frac{1}{5}[(60-88)^2+(76-88)^2+(90-88)^2+(92-88)^2+(122-88)^2]$

$=\frac{1}{5}(784+144+4+16+1156)=420.8$. …………………………………………………………… 4 分

因为 $\overline{x}_{甲}=\overline{x}_{乙}$，$s_{甲}^2<s_{乙}^2$，所以两组学生的总体水平相同，甲组学生的成绩水平差异比乙组的小. ………
…… 5 分

(Ⅱ)根据表格可知，10 位学生中及格的概率为 $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$，

所以估计全班及格的人数为 $50\times\frac{1}{2}=25$. …………………………………………………………………… 7 分

(Ⅲ)设事件 A 表示：从甲、乙两组中各抽取一名学生，两人考试分数之和大于等于 180，则从甲，乙两组中各抽取 1 名学生，两人的考试成绩可组成的基本事件为

(64,60)，(64,76)，(64,90)，(64,92)，(64,122)，
(72,60)，(72,76)，(72,90)，(72,92)，(72,122)，
(86,60)，(86,76)，(86,90)，(86,92)，(86,122)，
(98,60)，(98,76)，(98,90)，(98,92)，(98,122)，
(120,60)，(120,76)，(120,90)，(120,92)，(120,122)，共 25 种； ………………………………………… 9 分

事件 A 包含的基本事件有(64,122)，(72,122)，(86,122)，(98,90)，(98,92)，(98,122)，(120,60)，(120,76)，(120,90)，(120,92)，(120,122)，共 11 种， …………………………………………… 10 分

故由古典概型，得 $P(A)=\frac{11}{25}$. 即从甲、乙两组中各抽取一名学生，两人考试分数之和大于等于 180 的概率为 $\frac{11}{25}$. ………………………………………………………………………………………… 12 分

20. 解：(Ⅰ)由椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $a^2=4b^2$， ……………………………………… 1 分

将点 $P(2,1)$ 代入 $\frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，得 $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2}=1$，解得 $b^2=2$. ……………………………………… 2 分

于是 $a^2=8$. ……………………………………………………………………………………………… 3 分

∴椭圆的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. ………………………………………………………………… 4分

(Ⅱ)当M,N分别是短轴的端点时,显然直线AB为y轴,

所以若直线过定点,这个定点一定在y轴上.

当M,N不是短轴的端点时,设直线AB的方程为$y=kx+t$,设点$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=kx+t,\end{cases}$消去$y$,整理得$(1+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-8=0$, ……………………………… 6分

则$\Delta=(8kt)^2-4(1+4k^2)(4t^2-8)=16(8k^2-t^2+2)>0$,

则$x_1+x_2=-\frac{8kt}{4k^2+1}$,$x_1x_2=\frac{4t^2-8}{4k^2+1}$. ……………………………………………………… 8分

又直线PA的方程为$y-1=\frac{y_1-1}{x_1-2}(x-2)$,即$y-1=\frac{kx_1+t-1}{x_1-2}(x-2)$,

因此,点M的坐标为$\left(0,\frac{(1-2k)x_1-2t}{x_1-2}\right)$.同理可知,点$N$的坐标为$\left(0,\frac{(1-2k)x_2-2t}{x_2-2}\right)$,

由$OM=NO$,则$\frac{(1-2k)x_1-2t}{x_1-2}+\frac{(1-2k)x_2-2t}{x_2-2}=0$. ……………………………………… 10分

化简整理得$(2-4k)x_1x_2-(2-4k+2t)(x_1+x_2)+8t=0$,

则$(2-4k)\times\frac{4t^2-8}{4k^2+1}-(2-4k+2t)\left(-\frac{8kt}{4k^2+1}\right)+8t=0$,

当且仅当$t=-2$时,对任意的k都成立,直线AB过定点$Q(0,-2)$. …………………………… 12分

21. 解:(Ⅰ)函数$f(x)=xe^x-x$的定义域是$\mathbf{R}$.

由$f(x)=xe^x-x$,得$f'(x)=e^x+xe^x-1=(1+x)e^x-1$, ……………………………………… 1分

当$x>0$时,$1+x>1$,$e^x>1$,所以$(1+x)e^x>1$.所以$(1+x)e^x-1>0$,即$f'(x)>0$; …………… 2分

当$x<0$时,$1+x<1$,$0<e^x<1$,所以由$1+x<1$两边同时乘以正数e^x,得$(1+x)e^x<e^x<1$,

即$(1+x)e^x<1$.所以$(1+x)e^x-1<0$,即$f'(x)<0$. ………………………………………………… 3分

所以函数$f(x)$在区间$(-\infty,0]$上单调递减,在区间$(0,+\infty)$上单调递增. ……………………… 4分

(Ⅱ)证明:"不等式$f(x)\geqslant g(x)$在区间$(0,+\infty)$上恒成立"等价于"不等式$xe^x-x-\ln x-1\geqslant0$在区间$(0,+\infty)$上恒成立".

令$F(x)=xe^x-\ln x-x-1(x>0)$,则进一步转化为需要证明"不等式$F(x)\geqslant0$在区间$(0,+\infty)$上恒成立". ………………………………………………………………………………………… 5分

求导得$F'(x)=(x+1)e^x-\frac{1}{x}-1=\frac{x+1}{x}\cdot(xe^x-1)$,令$G(x)=xe^x-1$,则$G'(x)=(x+1)e^x$.

因为当$x>0$时,$G'(x)=(x+1)e^x>0$,所以函数$G(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增.

所以函数$G(x)$在区间$(0,+\infty)$上最多有一个零点.

又因为$G(0)=-1<0$,$G(1)=e-1>0$,所以存在唯一的$c\in(0,1)$,使得$G(c)=0$. …………… 7分

且当$x\in(0,c)$时,$G(x)<0$;当$x\in(c,+\infty)$时,$G(x)>0$,

即当$x\in(0,c)$时,$F'(x)<0$;当$x\in(c,+\infty)$时,$F'(x)>0$,

所以函数$F(x)$在区间$(0,c)$上单调递减,在区间$(c,+\infty)$上单调递增.

从而$F(x)\geqslant F(c)=ce^c-\ln c-c-1$. ……………………………………………………………… 9分

由$G(c)=0$,得$ce^c-1=0$,即$ce^c=1$,两边取对数,得$\ln c+c=0$, ………………………… 10分

所以$F(c)=ce^c-\ln c-c-1=(ce^c-1)-(\ln c+c)=0-0=0$. ……………………………………… 11分

所以$F(x)\geqslant F(c)=0$.即$F(x)\geqslant0$.

从而证得不等式$f(x)\geqslant g(x)$在区间$(0,+\infty)$上恒成立. ……………………………………… 12分

22. 解：(Ⅰ)由$\begin{cases}x=1+t,\\ y=4-\sqrt{3}t\end{cases}$消去参数 t，得$\sqrt{3}(x-1)=\sqrt{3}t=4-y$，即$\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}-4=0$，

所以直线 l 的普通方程是$\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}-4=0$. ………………………………………………… 2 分

由 $\rho=2\sin\theta$，得 $\rho^2=2\rho\sin\theta$，

根据公式$\begin{cases}\rho\cos\theta=x,\\ \rho\sin\theta=y,\end{cases}$得 $x^2+y^2=2y$，所以曲线 C 的直角坐标方程是 $x^2+y^2=2y$. ……………… 4 分

(Ⅱ)对于直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=1+t,\\ y=4-\sqrt{3}t\end{cases}$($t$ 是参数)，因为$\dfrac{y-4}{x-1}=-\sqrt{3}$，所以直线 l 的斜率是$-\sqrt{3}$.

因为曲线 C 在 M 处的切线与直线 l 垂直，又曲线 C 在 M 处的切线与 CM 垂直，

所以直线 l 与直线 CM 平行. ………………………………………………………………………… 6 分

所以直线 l 与直线 CM 的斜率相等. 所以直线 CM 的斜率是$-\sqrt{3}$.

设点 $M(x_0,y_0)$，则 $k_{CM}=\dfrac{y_0-1}{x_0-0}=-\sqrt{3}$，整理得 $y_0-1=-\sqrt{3}x_0$. ……………………………… 7 分

又因为点 $M(x_0,y_0)$在曲线 C：$x^2+(y-1)^2=1$ 上，

所以其坐标必然满足曲线 C 的方程：$x^2+(y-1)^2=1$，代入得 $x_0^2+(y_0-1)^2=1$. ……………… 8 分

联立$\begin{cases}y_0-1=-\sqrt{3}x_0,\\ x_0{}^2+(y_0-1)^2=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_0=\dfrac{1}{2},\\ y_0=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=-\dfrac{1}{2},\\ y_0=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

所以点 M 的直角坐标为$\left(\dfrac{1}{2},1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$或$\left(-\dfrac{1}{2},1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ………………………………………… 10 分

23. 解：(Ⅰ)$f(x)\leqslant 10$ 即为$|2x+1|+|x-4|\leqslant 10$. ………………………………………………… 1 分

当 $x<-\dfrac{1}{2}$时，不等式$|2x+1|+|x-4|\leqslant 10$ 可化为$-(2x+1)-(x-4)\leqslant 10$，

化简得$-3x+3\leqslant 10$，解得 $x\geqslant -\dfrac{7}{3}$. 故$-\dfrac{7}{3}\leqslant x<-\dfrac{1}{2}$； …………………………………………… 2 分

当$-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4$ 时，不等式$|2x+1|+|x-4|\leqslant 10$ 可化为$(2x+1)-(x-4)\leqslant 10$，

化简得 $x+5\leqslant 10$，解得 $x\leqslant 5$. 故$-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4$； ………………………………………………… 3 分

当 $x>4$ 时，不等式$|2x+1|+|x-4|\leqslant 10$ 可化为$(2x+1)+(x-4)\leqslant 10$，

化简得 $3x-3\leqslant 10$，解得 $x\leqslant\dfrac{13}{3}$. 故 $4<x\leqslant\dfrac{13}{3}$. ………………………………………………… 4 分

综上，不等式$|2x+1|+|x-4|\leqslant 10$ 的解集是$\left[-\dfrac{7}{3},\dfrac{13}{3}\right]$. ……………………………………… 5 分

(Ⅱ)不等式 $f(x)+|x-4|<a^2-8a$ 即为$|2x+1|+|x-4|+|x-4|<a^2-8a$.

得$|2x+1|+2|x-4|<a^2-8a$，得$|2x+1|+|2x-8|<a^2-8a$，

则问题“不等式 $f(x)+|x-4|<a^2-8a$ 的解集不是空集”转化为“不等式$|2x+1|+|2x-8|<a^2-8a$ 的解集不是空集”. ……………………………………………………………………………… 6 分

由绝对值三角不等式，得$|2x+1|+|2x-8|\geqslant|(2x+1)-(2x-8)|=9$， ……………………… 8 分

则由题意，得 $a^2-8a>9$，即 $a^2-8a-9>0$，解得 $a<-1$ 或 $a>9$.

所以若不等式 $f(x)+|x-4|<a^2-8a$ 的解集不是空集，

则实数 a 的取值范围为$(-\infty,-1)\cup(9,+\infty)$. ……………………………………………… 10 分