

广东省新高考普通高中学科综合素养评价  
高三年级期末考  
数学

本试卷共 6 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

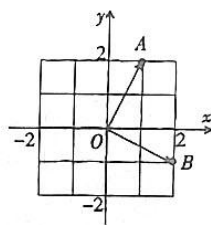
- 注意事项：1. 答卷前，考生务必用黑色笔迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡指定位置。  
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。  
3. 非选择题必须用黑色笔迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。  
4. 考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将试题与答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | |x| < 2\}$ ,  $B = \{x | y = \ln(a - 2x)\}$ , 且  $A \cap B = \{x | -2 < x < 1\}$ , 则  $a =$  ( )

- A. -4                      B. -2                      C. 2                      D. 4

2. 如图，在复平面内，复数  $z_1, z_2$  对应的向量分别是  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ , 且复数  $z_3 = 3 + \frac{z_1}{z_2}$ , 若复数  $z_3, z_4$  在复平面内的对应点关于虚轴对称，



则  $z_4 =$  ( )

- A.  $3 - i$                       B.  $3 + i$                       C.  $-3 - i$                       D.  $-3 + i$

3. 已知平面向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $\vec{a} = (1, -1)$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,  $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{2}$ , 则向量  $\vec{a}$  与向量  $\vec{a} + 2\vec{b}$  的夹角为 ( )

- A.  $\frac{\pi}{6}$                       B.  $\frac{\pi}{4}$                       C.  $\frac{\pi}{3}$                       D.  $\frac{\pi}{2}$

4. 如图所示，一款网红冰激凌可近似地看作是圆锥和半球的组合体，将圆锥外的包装纸展开发现，它是一张半径为 6 的半圆形纸片，则这个冰激凌的体积为 ( )



- A.  $27\pi$                       B.  $18\pi + 9\sqrt{3}\pi$                       C.  $36\pi + 9\sqrt{3}\pi$                       D.  $54\pi$

5. 已知角 $\alpha$ 的顶点为坐标原点，始边与 $x$ 轴的非负半轴重合，终边过点 $P(\sin 138^\circ, \cos 138^\circ)$ ，则 $\tan(\alpha + 18^\circ) = ( \quad )$

- A.  $\sqrt{3}$                   B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                   C.  $-\sqrt{3}$                   D.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. 在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_n > 0$ ，且 $na_{n+1}^2 - a_n a_{n+1} - (n+1)a_n^2 = 0$ ，则 $a_{20}$ 的值为 $( \quad )$

- A. 18                          B. 19                          C. 20                          D. 21

7.  $(x - 2y - 1)^5$ 的展开式中含 $x^2y^2$ 的项的系数为 $( \quad )$

- A. -120                      B. 60                          C. -60                      D. 30

8. 已知函数 $f(x) = x \sin x + \cos x + \frac{1}{2}x^2$ ，若 $a = f(\log_{\frac{1}{2}} e)$ ， $b = f(\sin \frac{1}{2})$ ， $c = f(\ln 3)$ ，则 $a, b, c$ 的大小关系为 $( \quad )$

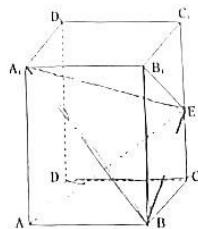
- A.  $c > a > b$               B.  $a > c > b$               C.  $a > b > c$               D.  $b > a > c$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 潮汐现象是由于海水受日月的引力在一定的的时候发生涨落的现象，一般早潮叫潮，晚潮叫汐，在通常情况下，船在涨潮时驶进航道，靠近船坞卸货后落潮时返回海洋，现有一条货船的吃水深度(船底与水面的距离)为 4m，根据安全条例规定至少要有 2m 的安全间隙(船底与海底的距离)，已知某港口在某季节的某一天的时刻 $x$ (单位：小时)与水深 $f(x)$ (单位：m)的关系为： $f(x) = 2\sin \frac{\pi}{6}x + 5$  ( $0 \leq x \leq 24$ )，则下列说法中正确的有 $( \quad )$

- A. 相邻两次潮水高度最高的时间间距为 24h  
B. 18 时潮水起落的速度为 $-\frac{\pi}{3}$ m/h  
C. 该货船在 2: 00 至 4: 00 期间可以进港  
D. 该货船在 13: 00 至 17: 00 期间可以进港

10. 如图，已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 1，侧棱长为 2，点 $E$ 为侧棱 $CC_1$ (含端点)上的动点，若平面 $\alpha$ 与直线 $AE$ 垂直，则下列说法正确的有 $( \quad )$



- A. 直线 $BB_1$ 与平面 $\alpha$ 不可能平行
- B. 直线 $CD$ 与平面 $\alpha$ 不可能垂直
- C.  $\triangle A_1BE$ 不可能为直角三角形
- D. 三棱锥 $B_1 - A_1BE$ 的体积是正四棱柱体积的 $\frac{1}{6}$

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数， $f(x)$ 的图象关于 $x = 1$ 对称，当 $x \in (0, 1]$ 时，

$f(x) = (\frac{1}{3})^{1-x}$ ，则下列判断正确的是 ( )

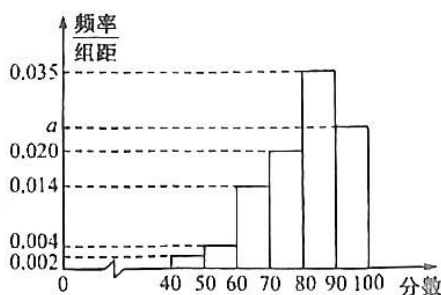
- A.  $f(x)$ 的周期为 2
- B.  $f(2023) = -1$
- C.  $f(x + 1)$ 是偶函数
- D.  $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$

12. 已知  $O$  是平面直角坐标系的原点，抛物线  $C: y = \frac{1}{4}x^2$  的焦点为  $F$ ， $P$ ， $Q$  两点在抛物线  $C$  上，下列说法正确的是 ( )

- A. 若  $|PF| = 5$ ，点  $P$  的坐标为  $(4, 4)$
- B. 直线  $y = x - 1$  与  $C$  不相切
- C.  $P$  到直线  $y = x - 2$  的距离的最小值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- D. 若  $P$ ， $F$ ， $Q$  三点共线，则  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = -3$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 某校为了了解高三年级学生的身体素质状况，在开学初举行了一场身体素质体能测试，以便对体能不达标的大学生进行有针对性的训练，促进他们体能的提升，现从整个年级测试成绩中抽取 100 名学生的测试成绩，并把测试成绩分成  $[40, 50)$ ， $[50, 60)$ ， $[60, 70)$ ， $[70, 80)$ ， $[80, 90)$ ， $[90, 100]$  六组，绘制成频率分布直方图(如图所示). 其中分数在  $[90, 100]$  这一组中的纵坐标为  $a$ ，则该次体能测试成绩的 80% 分位数约为 \_\_\_\_\_ 分.



14. 从点 $P(2,3)$ 射出两条光线的方程分别为:  $l_1: 4x - 3y + 1 = 0$  和  $l_2: 3x - 4y + 6 = 0$ , 经 $x$ 轴反射后都与圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$ 相切, 则圆的方程为\_\_\_\_\_.

15. 已知函数 $f(x) = x - 3\ln x$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线经过点 $(a, b)$ ,  $a > 0, b > 0$ , 则  $\frac{8a+b}{ab}$ 的最小值为\_\_\_\_\_.

16. 某工厂有甲、乙、丙三条生产线同时生产同一产品, 这三条生产线生产产品的次品率分别为 6%, 5%, 4%, 假设这三条生产线产品产量的比为 5 : 7 : 8, 现从这三条生产线上共任意选取 100 件产品, 则次品数的数学期望为\_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ ,  $a_5 = 5$ ,  $S_8 = 36$ ,  $a_n = \log_3(b_n)$ .

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \begin{cases} \frac{1}{a_n a_{n+2}}, & n \text{ 为奇数} \\ a_n b_{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 求数列 $\{c_n\}$ 的前 20 项和 $T_{20}$ .

18. (12 分)

已知锐角三角形  $ABC$  内角  $A, B, C$  的对应边分别为  $a, b, c$ , 且  $\cos 2A - \sqrt{3}\sin A + 2 = 0$ .

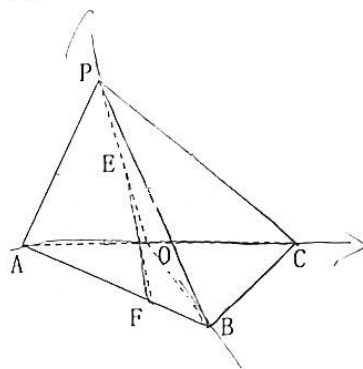
(1) 求  $\sin B + \sin C$  的取值范围;

(2) 若  $a = 2\sqrt{3}$ , 求  $\Delta ABC$  的面积的最大值.

19. (12分)

如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中,底面 $\triangle ABC$ 是边长为4的正三角形, $PA=PC$ , $PB=6$ ,三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $4\sqrt{3}$ , $O$ 是 $AC$ 的中点, $E$ 是 $PO$ 的中点,点 $F$ 在棱 $AB$ 上,且 $AF=3FB$ .

- (1) 求证: $EF \parallel$ 平面 $PBC$ ;
- (2) 求平面 $PAB$ 和平面 $ABC$ 所成角的余弦值.



20. (12分)

疫情期间某大型快餐店严格遵守禁止堂食的要求,在做好自身防护的同时,为了实现收益,也为了满足人们餐饮需求,增加打包和外卖配送服务,不仅如此,还提供了一款新套餐,丰富产品种类,该款新套餐每份成本20元,售价30元,保质期为两天,如果两天内无法售出,则过期作废,且两天内的销售情况互不影响,现统计并整理连续30天的日销量(单位:百份),得到统计数据如下表:

日销量(单位:百份)	12	13	14	15
天数	3	9	12	6

- (1) 记两天中销售该款新套餐的总份数为 $X$ (单位:百份),求 $X$ 的分布列和数学期望;
- (2) 以该款新套餐两天内获得利润较大为决策依据,在每两天备餐27百份、28百份两种方案中应选择哪种?

21. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的四个顶点围成的四边形面积为 $4\sqrt{2}$ ,

周长为 $4\sqrt{6}$ , 一双曲线 $E$ 的顶点是该椭圆的焦点, 焦点是该椭圆长轴上的顶点.

(1) 求椭圆 $C$ 和双曲线 $E$ 的标准方程;

(2)  $A, B, D$ 是双曲线 $E$ 上不同的三点, 且 $B, D$ 两点关于 $y$ 轴对称,  $\triangle ABD$ 的外接圆经过原点 $O$ . 求证: 直线 $AB$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax, g(x) = \ln(x+2) - a$ , 其中 $e$ 为自然对数的底数,  $a \in \mathbf{R}$ .

(1) 当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 有极小值 $f(1)$ , 求 $a$ ;

(2) 证明:  $f'(x) > g(x)$ 恒成立;

(3) 证明:  $\ln 2 + (\ln \frac{3}{2})^2 + (\ln \frac{4}{3})^3 + \dots + (\ln \frac{n+1}{n})^n < \frac{e}{e-1}$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

