

理科数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚。
2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。在试题卷上作答无效。
3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。满分150分，考试用时120分钟。

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{2} + y^2 = 1\}$, $B = \{(x, y) \mid x - y = 0\}$, 则 $A \cap B$ 中元素的个数为

- A. 2
B. 3
C. 4
D. 5

2. 已知复数 $z_1 = 1 - i$, $z_1 \cdot z_2 = 1$, 则复数 z_2 的虚部为

- A. $\frac{1}{2}$
B. $-\frac{1}{2}$
C. 1
D. -1

3. 已知随机变量 $X \sim N(1, \sigma^2)$, $P(X \geq 3) = 0.2$, 则 $P(-1 < X < 3) =$

- A. 0.1
B. 0.2
C. 0.4
D. 0.6

4. 某工厂产生的废气必须经过过滤后排放，规定排放时污染物的残留含量不得超过原污染物总量的0.5%。已知在过滤过程中的污染物的残留数量 P (单位：毫克/升) 与过滤时间 t (单位：小时) 之间的函数关系为 $P = P_0 \cdot e^{-kt}$ (P_0 为原污染物总量)，要能够按规定排放废气，则需要过滤 n 小时，则正整数 n 的最小值为 (参考数据：取 $\ln 5 = 1.609$, $\ln 2 = 0.693$)

- A. 14
B. 15
C. 16
D. 17

5. 已知向量 $a = (1, 2)$, $b = (-1, 0)$, $c = (-1, m)$, 若 $a - b$ 与 c 共线，则实数 $m =$

- A. 0
B. 1
C. -1
D. 2

6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 $2c$ ，且两条渐近线均与圆 $(x-c)^2 + y^2 = 4a^2$ 相切，则双曲线 C 的离心率为

A. $\sqrt{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. 2

D. $\frac{1}{5}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $A = 60^\circ$ ， $AC = 4$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$ ，则 $AB =$

A. $\sqrt{3}$

B. 2

C. $2\sqrt{3}$

D. 4

8. 某几何体的三视图如图 1 所示，则该几何体的表面积是

A. $2\sqrt{3} + 3$

B. $4\sqrt{2} + 3$

C. $4\sqrt{3} + 3$

D. $2\sqrt{5} + 3$

9. $\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} + \frac{1}{\sin 550^\circ} =$

A. -2

B. 2

C. -4

D. 4

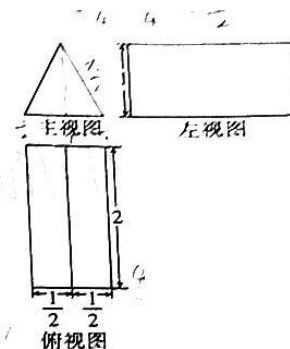


图 1

10. 曲线 $y = e^{2x}$ 上的点到直线 $2x - y - 4 = 0$ 的最短距离是

A. $\sqrt{5}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}$

D. 1

11. 已知抛物线 $y^2 = 16x$ ，过点 $M(2, 0)$ 的直线交抛物线于 A, B 两点， F 为抛物线的焦点，若 $|AF| = 12$ ， O 为坐标原点，则四边形 $OAFB$ 的面积是

A. $20\sqrt{2}$

B. $10\sqrt{2}$

C. $5\sqrt{2}$

D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

12. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $[3, +\infty)$ 上是减函数， $a = 4\ln 6^5$ ， $b = 6\ln 4^5$ ， $c = 6\ln 5^4$ ，则 a, b, c 的大小关系为

A. $c < a < b$

B. $a < c < b$

C. $b < c < a$

D. $a < b < c$

13. 已知实数 x, y 满足不等式 $\begin{cases} x + y + 2 \geq 0, \\ x + y - 3 \leq 0, \\ x \geq 1, \end{cases}$ 则 $x^2 + y^2$ 的最大值为 $\frac{17}{2}$.

14. 二项式 $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ 的展开式中常数项为 60, 则 $n = 10$.

15. 若圆锥的内切球与外接球的球心重合, 且圆锥内切球的半径为 1, 则圆锥的表面积为 16π .

16. 如图 2 所示, 太极图是由黑白两个鱼形纹组成的图案, 俗称阴阳鱼, 太极图展现了一种相互转化, 相对统一的和谐美. 定义: 能够将圆 O 的周长和面积同时等分成两个部分的函数称为圆 O 的一个“太极函数”. 则下列有关说法中:

- (1) 函数 $f(x) = \frac{1}{x+1}$ 是圆 $O_1: x^2 + (y-1)^2 = 1$ 的一个太极函数;
(2) 函数 $f(x) = e^{x-1} - e^x$ 是圆 $O_2: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 的一个太极函数;
(3) 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x > 0 \\ x^2 - x + 1, & x < 0 \end{cases}$ 是圆 $O_3: x^2 + y^2 = 1$ 的一个太极函数;
(4) 函数 $f(x) = \ln(x+1)$ 是圆 $O_4: x^2 + y^2 = 1$ 的一个太极函数.

所有正确的序号是 (1)(3)(4).

17. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = \frac{n+1}{2} \cdot a_n (n \in \mathbb{N}^+)$, 且 $a_2 = 2$.

- (1) 计算 a_1, a_3 , 猜想数列 $\{a_n\}$ 的通项公式并加以证明;
(2) 设 $b_n = a_n \cdot 2^n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

线上直播带货弥补了人们因疫情足不出户的消费需求. 某直播平台抽取了该平台秀场类 200 个直播间, 进行了一次直播销量抽样调查, 其中播出时间固定的有 120 个, 播出时间不固定的有 80 个. 这 200 场直播单位时间 (分钟) 销量的频率分布直方图如图 3 所示, 假设该平台规定单位时间 (分钟) 销量在 1000 份及以上的为“高销量直播间”. 据统计, 在这 200 场直播中, 播出时间固定且为“高销量直播间”的频率为 0.35.

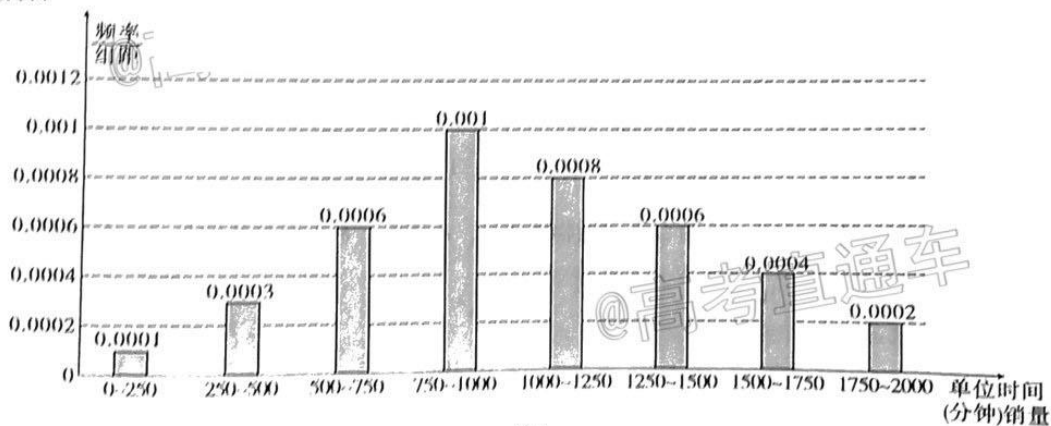


图 3

- (1) 补全 2×2 列联表, 并根据表中数据判断是否有 99.5% 的把握认为单位时间 (分钟) 销量与播出时间是否固定有关系;

	播出时间固定	播出时间不固定	总计
高销量直播间			
非高销量直播间			
总计	120	80	200

(2) 将上述调查所得的频率视为概率，且该平台为场主直播中随机抽取 5 场，记“低流量直播”场数为 X ，求 X 的分布列和期望；
(3) 仍将上述调查所得的频率视为概率，规定“高流量直播”为输，“低流量直播”为输，且该平台为场主直播中随机抽取 5 场，记输的场数为 Y ，求 Y 的期望。

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2 \geq k_{\alpha})$	0.100	0.050	0.010	0.001
k_{α}	2.706	3.841	6.635	10.828

19. (本小题满分 12 分)

如图 4，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， D ， E ， F 分别为 AA_1 ， B_1C_1 ， BC 的中点。

- (1) 证明： DE 与 A_1F 在同一平面内；
(2) 已知异面直线 B_1C_1 与 AA_1 所成的角为 45° ，求直线 DE 与平面 DBC_1 所成角的大小。

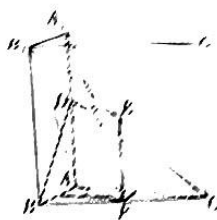


图 4

20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}ax$ ($a \in \mathbb{R}$) 在 $[0, 1]$ 上的最小值为 $\frac{1}{6}$ 。

- (1) 求 a 的值；
(2) 讨论函数 $g(x) = f(x) - 2$ ($b \in \mathbb{R}$) 的零点个数。

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两个焦点分别是 F_1 ， F_2 ，其长轴长是短轴长的 2 倍， P 为椭圆上任意一点，且 $\triangle PF_1F_2$ 的面积最大值为 $\frac{1}{3}$ 。

- (1) 求椭圆 M 的方程；
(2) 设直线 l 与椭圆 M 交于 A ， B 两点，且以线段 AB 为直径的圆过椭圆的右顶点 C ，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值。

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑。注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致，在答题卡上选答区域指定位置答题。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. (本小题满分 10 分) 【选修 4-4：坐标系与参数方程】

在新中国成立 70 周年国庆阅兵庆典中，众多群众在脸上贴着一颗红心，以此表达对祖国的热爱之情。在数学中，有多种方程都可以表示心型曲线，其中有著名的笛卡尔心型曲线。如图 5，在直角坐标系中，以原点 O 为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系。图中的曲线就是笛卡尔心型曲线，其极坐标方程为 $\rho = 1 - \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$, $\rho > 0$)， M 为该曲线上的任意一点。

- (1) 当 $|OM| = \frac{1}{2}$ 时，求 M 点的极坐标；当 M 的极角为 $\frac{7\pi}{6}$ 时，求它的极径；
(2) 若过极点的直线 AB 与该曲线相交于两点 A ， B ，求证：弦长 $|AB|$ 为定值，并求出这个定值。

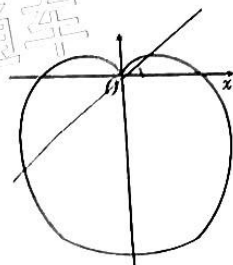


图 5

23. (本小题满分 10 分) 【选修 4-5：不等式选讲】

已知 $m > 0$ ， $n > 0$ ，且 $m + n = 1$ 。

- (1) 若 $\frac{1}{m} + \frac{4}{n} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ 恒成立，求 x 的取值范围；
(2) 证明： $\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)(m^2 + n^2) \geq 1$ 。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》