绝密★启用前

2022 届新高三摸底联考

理数试卷

本试卷共 4 页，23 题（含选考题）。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答：用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

第 Ⅰ 卷

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-4x<0\}$，$B=\{y|y>2\}$，则 $A\cap B=$

A. $\varnothing$　　B. $(2,4)$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $(4,+\infty)$

2. 命题"$\exists x_0>0,x_0^3>2x_0+100$"的否定是

A. $\exists x_0\leqslant 0,x_0^3\leqslant 2x_0+100$　　B. $\forall x>0,x^3\leqslant 2x+100$

C. $\exists x_0>0,x_0^3\leqslant 2x_0+100$　　D. $\forall x\leqslant 0,x^3\leqslant 2x+100$

3. 已知复数 z 满足 $(\bar{z}-3\mathrm{i})\cdot(2-\mathrm{i})=5\mathrm{i}$，则 z 的虚部为

A. $-5\mathrm{i}$　　B. $5\mathrm{i}$　　C. -5　　D. 5

4. 在区间 $[1,5]$ 上随机取一个数 t，则 $\int_0^2 t\mathrm{d}x>4$ 的概率为

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{3}{4}$

5. 中国古代数学名著《算法统宗》中有这样一个问题："今有俸粮三百零五石，令五等官（正一品、从一品、正二品、从二品、正三品）依品递差十三石分之，问，各若干？"其大意是，现有俸粮 305 石，分给正一品、从一品、正二品、从二品、正三品这 5 位官员，依照品级递减 13 石分这些俸粮，问，每个人各分得多少俸粮？在这个问题中，正三品分得俸粮是

A. 35 石　　B. 48 石　　C. 61 石　　D. 74 石

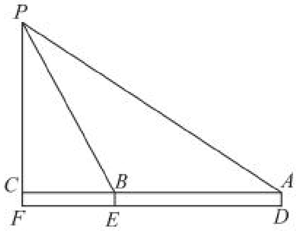
6. 已知向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 满足 $\boldsymbol{m}=(-3,4)$，$|\boldsymbol{n}|=1$，$\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，则 $|\boldsymbol{m}+5\boldsymbol{n}|=$

A. 0　　B. 10　　C. 0 或 10　　D. 0 或 100

7. 已知正三棱柱（底面为正三角形的直棱柱）$ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BB_1=2AB$，点 E 是 B_1C_1 的中点，则异面直线 CE 与 AB_1 所成角的余弦值为

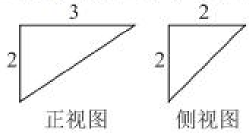
A. $\frac{\sqrt{15}}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{85}}{10}$　　C. $\frac{\sqrt{51}}{17}$　　D. $\frac{\sqrt{51}}{3}$

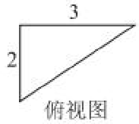
8. 江西南昌的滕王阁，位于南昌沿江路赣江东岸，始建于唐永徽四年（即公元 653 年），是古代江南唯一的皇家建筑．因初唐诗人王勃所作《滕王阁序》而名传千古，流芳后世，被誉为"江南三大名楼"之首（另外两大名楼分别为岳阳的岳阳楼与武汉的黄鹤楼）．小张同学为测量滕王阁的高度，选取了与底部水平的直线 DF，将自制测量仪器分别放置于 D,E 两处进行测量．如图，测量仪器高 $AD=\sqrt{3}$ m，点 P 与滕王阁顶部平齐，并测得 $\angle CBP=2\angle CAP=60^\circ$，$AB=64$ m，则小张同学测得滕王阁的高度为



A. $32\sqrt{3}$ m　　B. $33\sqrt{3}$ m　　C. 32 m　　D. 33 m

9. 如图为一个三棱锥的三视图，则该三棱锥的外接球表面积为





A. 17π　　B. 34π　　C. 68π　　D. $\frac{17\sqrt{17}}{6}\pi$

10. 已知函数 $f(x)=2\cos^2\left(\omega x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{1}{2}(\omega>0)$ 在 $[0,\pi]$ 上恰有 7 个零点，则 ω 的取值范围是

A. $\left[\frac{41}{12},\frac{15}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{49}{12},\frac{23}{4}\right]$　　C. $\left(\frac{41}{12},\frac{15}{4}\right]$　　D. $\left[\frac{49}{12},\frac{23}{4}\right)$

11. 已知点 F_1,F_2 分别为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，点 M 在直线 $l:x=-a$ 上运动，若 $\angle F_1MF_2$ 的最大值为 $60°$，则椭圆 C 的离心率是

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

12. 实数 x,y,z 分别满足 $19^x=20,20^y=21,\log_{\frac{20}{19}}z=\frac{21}{20}$，则 x,y,z 的大小关系为

A. $x>y>z$　　B. $x>z>y$　　C. $z>x>y$　　D. $y>x>z$

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第 13～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22～23 题为选考题，考生根据要求作答。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分。

13. 写出一个最小值为 2 021 的偶函数 $f(x)=$________.

14. 定义：以双曲线的实轴为虚轴，虚轴为实轴的双曲线与原双曲线互为共轭双曲线. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{m}-y^2=1(m>0)$ 的一条渐近线过点 $(2,4)$，则 C 的共轭双曲线的标准方程为________.

15. 2021 年以来，全球新冠肺炎疫情依然复杂严峻，境外输入风险持续存在. 某市疾控中心决定将含 A,B 在内的 6 名专家平均分配到 3 所县疾控中心去指导防疫工作，若 A,B 这 2 名专家不能分配在一起，则不同的分配方法有________种.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $(a-b)\sin B=a(\sin A+2\sin B)-c\sin C$，$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 2，若 $a+tb$ 有最大值，则实数 t 的取值范围是________.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 12 分）

某村为巩固脱贫成果，积极引导村民种植一种名贵中药材，但这种中药材需加工成半成品才能销售. 现有甲、乙两种针对这种中药材的加工方式可供选择，为比较这两种加工方式的优劣，村委会分别从甲、乙两种加工方式所加工的半成品中，各自随机抽取了 100 件作为样本检测其质量指标值（质量指标值越大，质量越好），检测结果如下表所示：

指标区间 / 频数	[70,80)	[80,90)	[90,100)	[100,110)	[110,120]
甲种生产方式	8	20	36	24	12
乙种生产方式	6	26	38	22	8

已知每件中药半成品的等级与纯利润间的关系如下表所示：

指标区间	[70,90)	[90,100)	[100,120]
等级	二级	一级	特级
纯利润	30	50	100

将频率视为概率，解答下列问题.

(1)分别记利用甲种、乙种加工方式所加工的一件中药材半成品的利润为 X,Y,求 X、Y 的分布列；

(2)从数学期望的角度分析村民选择哪种中药材加工方式获利更多.

18.(本小题满分 12 分)

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $a_n=\dfrac{2S_n+3}{3}$.

(1)求证：数列$\{a_n\}$是等比数列；

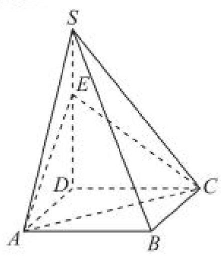
(2)求数列$\left\{\dfrac{1}{\log_3 a_n \cdot \log_3 a_{n+2}}\right\}$的前 n 项和 T_n.

19.(本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面四边形 $ABCD$ 是矩形，$SD\perp$平面 $ABCD$,$AC\perp SB$,$SD=\sqrt{2}CD=2$.

(1)求 SA 的长；

(2)点 E 在棱 SD 上，且 $2SE=DE$,求直线 AS 与平面 ACE 所成角的正弦值.



20.（本小题满分 12 分）

已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，且点 F 与圆 $M:(x+4)^2+y^2=1$ 上点的距离的最大值为 $\sqrt{17}+1$.

(1)求 p；

(2)已知直线 $l:y=kx+4$ 与 C 相交于 A,B 两点，过点 B 作平行于 y 轴的直线 BD 交直线 $l':y=-4$ 于点 D. 问：直线 AD 是否过 y 轴上的一定点？若过定点，求出该定点的坐标；若不过定点，试说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-m(x^2-x)(m\geqslant-8$，且 $m\neq0)$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)证明：当 $x>-1$ 时，$(x^2+4x+5)\ln(x+2)-4e^{x+1}<2e^{x+1}(x^2+3x)$.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）选修 4－4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(1)求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程；

(2)若点 P 的直角坐标为 $(-1,2)$，直线 l 与曲线 C 相交于 A,B 两点，求 $|PA|^3+|PB|^3$ 的值.

23.（本小题满分 10 分）选修 4－5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|2x+1|+|2x-5|$.

(1)解不等式 $f(x)<8$；

(2)若 $f(x)>|a-2|$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 a 的取值范围.

2022届新高三摸底联考

理数参考答案及评分细则

一、选择题

1. B 【解析】因为 $A=\{x|0<x<4\}$，所以 $A\cap B=(2,4)$. 故选 B.

2. B 【解析】变量词，否结论，可得命题的否定为 $\forall x>0, x^3\leqslant 2x+100$. 故选 B.

3. C 【解析】由题意 $\bar{z}=\frac{5i}{2-i}+3i=\frac{5i(2+i)}{5}+3i=-1+5i$，所以 $z=-1-5i$，故 z 的虚部为 -5. 故选 C.

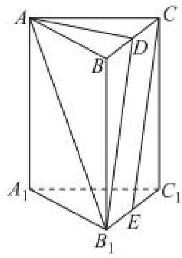
4. D 【解析】$\int_0^2 t\mathrm{d}x=tx|_0^2=2t$，令 $2t>4$，得 $t>2$，故所求的概率为 $P=\frac{5-2}{5-1}=\frac{3}{4}$. 故选 D.

5. A 【解析】正一品、从一品、正二品、从二品、正三品这 5 位官员所分得的俸粮数记为数列$\{a_n\}$，则$\{a_n\}$是以 -13 为公差的等差数列，且 $S_5=5a_1+10\times(-13)=305$，解得 $a_1=87$，故正三品分得俸粮数量为 $a_5=a_1+4\times(-13)=35$(石). 故选 A.

6. C 【解析】解法 1：设 $\boldsymbol{n}=(x,y)$，则由已知得 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\-3y-4x=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{3}{5},\\y=-\frac{4}{5},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{3}{5},\\y=\frac{4}{5},\end{cases}$ 当 $x=\frac{3}{5}, y=-\frac{4}{5}$ 时，$\boldsymbol{m}+5\boldsymbol{n}=(-3,4)+(3,-4)=(0,0)$，此时 $|\boldsymbol{m}+5\boldsymbol{n}|=0$；当 $x=-\frac{3}{5}, y=\frac{4}{5}$ 时，$\boldsymbol{m}+5\boldsymbol{n}=(-3,4)+(-3,4)=(-6,8)$，此时 $|\boldsymbol{m}+5\boldsymbol{n}|=10$. 故 $|\boldsymbol{m}+5\boldsymbol{n}|=0$ 或 10. 故选 C.

解法 2：由 $\boldsymbol{m}=(-3,4)$，$|\boldsymbol{n}|=1$，且 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，可知 $\boldsymbol{m}=\pm 5\boldsymbol{n}$. 当 $\boldsymbol{m}=5\boldsymbol{n}$ 时，$|\boldsymbol{m}+5\boldsymbol{n}|=10|\boldsymbol{n}|=10$；当 $\boldsymbol{m}=-5\boldsymbol{n}$时，$|\boldsymbol{m}+5\boldsymbol{n}|=0|\boldsymbol{n}|=0$，故$|\boldsymbol{m}+5\boldsymbol{n}|=0$ 或 10. 故选 C.

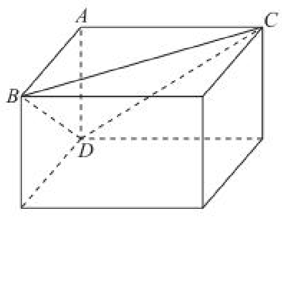
7. B 【解析】如图，取 BC 的中点 D，连接 AD, DB_1，



设 $AB=2$，则 $BB_1=4$，$B_1D=\sqrt{BB_1^2+BD^2}=\sqrt{17}$，$AB_1=\sqrt{AA_1^2+A_1B_1^2}=2\sqrt{5}$，由 $EB_1/\!/CD$，且 $EB_1=CD$，得四边形 EB_1DC 为平行四边形，得 $DB_1/\!/CE$，故$\angle AB_1D$(或补角)为异面直线 CE 与 AB_1 所成的角. 由$\triangle ABC$ 为等边三角形，D 为 BC 的中点，得 $AD\perp BC$，又平面 $ABC\perp$平面 B_1C_1CB，平面 $ABC\cap$平面 $B_1C_1CB=BC$，所以 $AD\perp$平面 B_1C_1CB，所以 $AD\perp B_1D$，所以 $\cos\angle AB_1D=\frac{B_1D}{AB_1}=\frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{85}}{10}$. 故选 B.

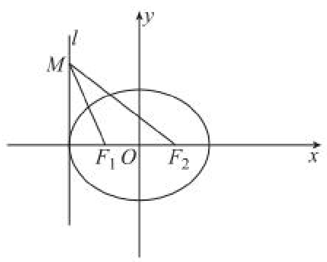
8. B 【解析】Rt$\triangle BPC$ 中，$\angle PBC=60^\circ$，又$\angle CAP=30^\circ$，所以$\angle BPA=30^\circ$，则 $BP=AB$，$PC=BP\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 64=32\sqrt{3}$，故小张同学测得滕王阁的高度 PF 为 $33\sqrt{3}$ m. 故选 B.

9. A 【解析】在长方体中画出该几何体，易得该几何体为三棱锥 $A-BCD$，且该三棱锥与该长方体外接球相同，其中 $AC=3$，$AB=AD=2$，故所求三棱锥外接球的直径为 $2R=\sqrt{3^2+2^2+2^2}=\sqrt{17}$，所以 $R=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+2^2+2^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$，故其外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=17\pi$. 故选 A.



10. A 【解析】$f(x)=2\cos^2\left(\omega x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{1}{2}=\cos\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$,令 $t=2\omega x-\frac{\pi}{6}$,∵$0\leqslant x\leqslant\pi$,∴$-\frac{\pi}{6}\leqslant 2\omega x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2\pi\omega-\frac{\pi}{6}$,由题意 $f(x)$在$[0,\pi]$上恰有 7 个零点,即 $\cos t=-\frac{1}{2}$在 $t\in\left[-\frac{\pi}{6},2\pi\omega-\frac{\pi}{6}\right]$上恰有 7 个不相等的实根,由 $y=\cos t$ 的性质可得$\frac{20\pi}{3}\leqslant 2\pi\omega-\frac{\pi}{6}<\frac{22\pi}{3}$,解得$\frac{41}{12}\leqslant\omega<\frac{15}{4}$. 故选 A.

11. C 【解析】由题意可知,$F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,$c>0$,直线 l 的方程为 $x=-a$,设直线 MF_1,MF_2 的倾斜角分别为 α,β,由椭圆的对称性不妨设 M 为第二象限的点,即 $M(-a,t)(t>0)$,则 $\tan\alpha=\frac{t}{c-a}$,$\tan\beta=\frac{-t}{c+a}$. ∵$\angle F_1MF_2=\beta-\alpha$,∴$\tan\angle F_1MF_2=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{t}{c+a}-\frac{t}{c-a}}{1-\frac{t^2}{c^2-a^2}}=\frac{2ct}{t^2+b^2}=\frac{2c}{t+\frac{b^2}{t}}\leqslant\frac{2c}{2\sqrt{t\cdot\frac{b^2}{t}}}=\frac{2c}{2b}=\frac{c}{b}$,当且仅当 $t=\frac{b^2}{t}$,即 $t=b$ 时取等号,又 $\tan\angle F_1MF_2$ 的最大值为$\frac{c}{b}=\tan 60°=\sqrt{3}$,∴$c=\sqrt{3}b$,即 $c^2=3a^2-3c^2$,整理得$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故椭圆 C 的离心率是$\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.



12. C 【解析】由已知得 $x=\log_{19}20$,$y=\log_{20}21$,$z=\left(\frac{20}{19}\right)^{\frac{21}{20}}$,则 $x-y=\log_{19}20-\log_{20}21=\frac{\lg 20}{\lg 19}-\frac{\lg 21}{\lg 20}=\frac{\lg^2 20-\lg 19\cdot\lg 21}{\lg 19\cdot\lg 20}$,因为 $\lg 19\cdot\lg 21<\left[\frac{1}{2}(\lg 19+\lg 21)\right]^2=\left(\frac{1}{2}\lg 399\right)^2$,所以有 $\frac{\lg^2 20-\lg 19\cdot\lg 21}{\lg 19\cdot\lg 20}>\frac{\lg^2 20-\left(\frac{1}{2}\lg 399\right)^2}{\lg 19\cdot\lg 20}=\frac{\left(\lg 20+\frac{1}{2}\lg 399\right)\cdot\left(\lg 20-\frac{1}{2}\lg 399\right)}{\lg 19\cdot\lg 20}>0$,所以 $x>y$,设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$,$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,当 $x\in(e,+\infty)$时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$在$(e,+\infty)$上单调递减,因此 $f(20)<f(19)$,即$\frac{\ln 19}{19}>\frac{\ln 20}{20}$,所以 $20\ln 19>19\ln 20$,所以 $19^{20}>20^{19}$,所以 $19^{\frac{20}{19}}>20$,所以$\frac{20}{19}>\log_{19}20=x$,又 $z=\left(\frac{20}{19}\right)^{\frac{21}{20}}>\frac{20}{19}$,所以 $z>x$. 综上可知 $z>x>y$. 故选 C.

二、填空题

13. $|x|+2\ 021$(答案不唯一) 【解析】若 $f(x)=|x|+2\ 021$,则 $f(-x)=|-x|+2\ 021=f(x)$,所以 $f(x)$为偶函数,显然 $f(x)$的最小值为 2 021,故 $f(x)$可以为 $f(x)=|x|+2\ 021$.

14. $y^2-\frac{x^2}{\frac{1}{4}}=1$ 【解析】双曲线 C:$\frac{x^2}{m}-y^2=1(m>0)$的渐近线方程为 $y=\pm\frac{x}{\sqrt{m}}$,一条渐近线过点$(2,4)$,可得$\frac{2}{\sqrt{m}}=4$,∴$m=\frac{1}{4}$,故 C 的方程为 $4x^2-y^2=1$,C 的共轭双曲线的标准方程为 $y^2-\frac{x^2}{\frac{1}{4}}=1$.

15. 72 【解析】将 6 名专家平均分配到 3 所县疾控中心的方法数为 $C_6^2C_4^2C_2^2=90$,其中这 2 名专家分配在一起的方法数为 $3C_4^2C_2^2=18$,故所求的分配方法数 $N=90-18=72$.

16. $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 【解析】由已知及正弦定理可得$(a-b)b$

$=a(a+2b)-c^2$,整理得 $a^2+b^2-c^2=-ab$,由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$,又 $C\in(0,\pi)$,得 $C=\frac{2\pi}{3}$,由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}=4$,∴ $a+tb=4(\sin A+t\sin B)=4t\sin B+4\sin\left(\frac{\pi}{3}-B\right)=4t\sin B+4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\frac{1}{2}\sin B\right)=(4t-2)\sin B+2\sqrt{3}\cos B=\sqrt{(4t-2)^2+12}\cdot\sin(B+\theta)$,其中 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{2t-1}$,又 $B\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,∴若 $a+tb$ 存在最大值,即 $B+\theta=\frac{\pi}{2}$ 有解,即 $\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$,∴ $\begin{cases}2t-1>0,\\ \frac{\sqrt{3}}{2t-1}>\frac{\sqrt{3}}{3},\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2}<t<2$,即 t 的范围是 $\left(\frac{1}{2},2\right)$.

三、解答题

17. **解**:(1)X 的分布列为

X	30	50	100
P	0.28	0.36	0.36

(3 分)

Y 的分布列为

Y	30	50	100
P	0.32	0.38	0.30

(6 分)

(2)$E(X)=30\times0.28+50\times0.36+100\times0.36=62.4$(元), (8 分)

$E(Y)=30\times0.32+50\times0.38+100\times0.30=58.6$(元), (10 分)

因为 $E(X)>E(Y)$,所以村民选择甲种中药材加工方式获利更多. (12 分)

18. **解**:(1)由 $a_n=\frac{2S_n+3}{3}$,得 $3a_n=2S_n+3$, ①

于是得 $3a_{n+1}=2S_{n+1}+3$, ②

②−①得 $3a_{n+1}-3a_n=2a_{n+1}$,

即 $a_{n+1}=3a_n$, (4 分)

当 $n=1$ 时,$3a_1=2S_1+3=2a_1+3$,即 $a_1=3$,

所以数列$\{a_n\}$是以 3 为首项,3 为公比的等比数列. (5 分)

(2)由(1)知 $a_n=3^n$, (6 分)

所以 $\log_3 a_n=\log_3 3^n=n$,

所以 $\frac{1}{\log_3 a_n\cdot\log_3 a_{n+2}}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$, (9 分)

所以 $T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$. (12 分)

19. **解**:(1)连接 BD,因为 $SD\perp$平面 $ABCD$,$AC\subset$平面 $ABCD$,

所以 $AC\perp SD$, (1 分)

又 $AC\perp SB$,$SB\cap SD=S$,

所以 $AC\perp$平面 SBD, (2 分)

又 $BD\subset$平面 SBD,所以 $AC\perp BD$,

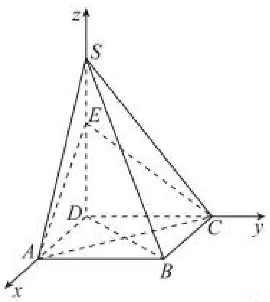
所以矩形 $ABCD$ 为正方形, (4 分)

所以 $AD=CD=\sqrt{2}$,

$SA=\sqrt{AD^2+SD^2}=\sqrt{6}$. (5 分)

(2)由已知可知 $SD\perp AD$,$SD\perp CD$,$AD\perp CD$,

以 D 为原点,以 DA,DC,DS 分别作为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系,如图所示,



可得 $D(0,0,0)$，$A(\sqrt{2},0,0)$，$C(0,\sqrt{2},0)$，$S(0,0,2)$，$E\left(0,0,\frac{4}{3}\right)$， （6分）

则$\overrightarrow{EA}=\left(\sqrt{2},0,-\frac{4}{3}\right)$，$\overrightarrow{EC}=\left(0,\sqrt{2},-\frac{4}{3}\right)$，$\overrightarrow{AS}=(-\sqrt{2},0,2)$， （7分）

设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}\sqrt{2}x-\frac{4}{3}z=0,\\ \sqrt{2}y-\frac{4}{3}z=0,\end{cases}$

取 $z=3$，可得 $x=2\sqrt{2}$，$y=2\sqrt{2}$，

即 $\boldsymbol{n}=(2\sqrt{2},2\sqrt{2},3)$， （9分）

设直线 AS 与平面 ACE 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AS}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AS}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AS}|}$

$=\frac{|-\sqrt{2}\times2\sqrt{2}+0\times2\sqrt{2}+2\times3|}{\sqrt{6}\times5}=\frac{\sqrt{6}}{15}$.

所以直线 AS 与平面 ACE 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{15}$.

（12分）

20. **解**：(1)抛物线 C 的焦点为 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$，$|FM|=\sqrt{16+\frac{p^2}{4}}$， （2分）

$\therefore F$ 与圆 M 上点的距离的最大值为$\sqrt{16+\frac{p^2}{4}}+1=\sqrt{17}+1$，

解得 $p=2$. （5分）

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $D(x_2,-4)$，

由$\begin{cases}x^2=4y,\\ y=kx+4,\end{cases}$ 得 $x^2-4kx-16=0$，

$\therefore\Delta>0$，且 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-16$， （7分）

$\therefore kx_1x_2=-4(x_1+x_2)$， （8分）

又直线 AD 的方程为 $y+4=\frac{y_1+4}{x_1-x_2}(x-x_2)$，

令 $x=0$，得 $y+4=\frac{x_2(y_1+4)}{x_2-x_1}$， （9分）

$\because y_1=kx_1+4$，

$\therefore y+4=\frac{x_2(kx_1+8)}{x_2-x_1}=\frac{-4(x_1+x_2)+8x_2}{x_2-x_1}=4$，

$\therefore y=0$，

故直线 AD 恒过定点$(0,0)$. （12分）

21. **解**：(1)函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{x}-m(2x-1)=-\frac{2mx^2-mx-1}{x}$， （1分）

令 $g(x)=2mx^2-mx-1$，$g(x)$为二次函数，$\Delta=m^2+8m$，

①当$-8\leqslant m<0$ 时，$\Delta\leqslant0$，$g(x)\leqslant0$，

所以 $f'(x)\geqslant0$，故 $f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增；

（2分）

②当 $m>0$ 时，$\Delta>0$，

令 $g(x)=0$，

得 $x_1=\frac{m-\sqrt{m^2+8m}}{4m}$，$x_2=\frac{m+\sqrt{m^2+8m}}{4m}$，

显然 $x_1<0<x_2$，

所以当 $x\in(0,x_2)$，$g(x)<0$，

所以 $f'(x)>0$，故 $f(x)$单调递增；

当 $x\in(x_2,+\infty)$时，$g(x)>0$，

所以 $f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

综上，当 $m>0$ 时，$f(x)$在$\left(0,\frac{m+\sqrt{m^2+8m}}{4m}\right)$单调递增，在$\left(\frac{m+\sqrt{m^2+8m}}{4m},+\infty\right)$上单调递减；

当$-8\leqslant m<0$ 时，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增. （5分）

(2)要证$(x^2+4x+5)\ln(x+2)-4e^{x+1}<2e^{x+1}(x^2+3x)(x\in(-1,+\infty))$，

只需证$(x^2+4x+5)\ln(x+2)<2e^{x+1}(x^2+3x+2)$，

由(1)知，当 $m=1$ 时，$f(x)$在$(0,1)$单调递增，在$(1,+\infty)$单调递减，

因此对$\forall x>1$ 恒有 $f(x)<f(1)$，即 $\ln x<x^2-x$，

于是得对$\forall x>-1$ 恒有 $0<\ln(x+2)<(x+2)^2-(x+2)=x^2+3x+2$， （7分）

令 $\varphi(x)=2e^{x+1}-(x^2+4x+5)(x\geqslant -1)$，

则 $\varphi'(x)=2e^{x+1}-2x-4$，

记 $u(x)=2e^{x+1}-2x-4(x\geqslant -1)$，

则 $u'(x)=2e^{x+1}-2$，

因为 $x\geqslant -1$，所以 $u'(x)\geqslant 0$，

所以 $\varphi'(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递增，

又 $\varphi'(-1)=0$，所以当 $x\geqslant -1$ 时，$\varphi'(x)\geqslant 0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 单调递增，

又 $\varphi(-1)=0$，所以对 $\forall x>-1$ 恒有 $\varphi(x)>\varphi(-1)=0$，

即 $2e^{x+1}>x^2+4x+5>0$，也即 $0<x^2+4x+5<2e^{x+1}$，（10 分）

又 $0<\ln(x+2)<x^2+3x+2$，

由不等式的基本性质可得 $(x^2+4x+5)\ln(x+2)<2e^{x+1}(x^2+3x+2)$，

所以 $(x^2+4x+5)\ln(x+2)-4e^{x+1}<2e^{x+1}(x^2+3x)$．（12 分）

22. **解**：(1)由 $\begin{cases} x=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t, \end{cases}$（$t$ 为参数）

消去 t 得直线 l 的普通方程为 $x+y-1=0$．（2 分）

由曲线 C 的极坐标方程得 $\rho^2=4\sqrt{2}\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}\rho\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)$，

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=4x+4y$，

即 $(x-2)^2+(y-2)^2=8$．（5 分）

(2)将 $\begin{cases} x=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t, \end{cases}$

代入 $(x-2)^2+(y-2)^2=8$，

得 $t^2+3\sqrt{2}t+1=0$，$\Delta=14>0$，故有两个交点，

设 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2，

则 $t_1+t_2=-3\sqrt{2}$，$t_1\cdot t_2=1$，（7 分）

故 $t_1<0,t_2<0$，

所以 $|PA|^3+|PB|^3=(|PA|+|PB|)(|PA|^2+|PB|^2-|PA||PB|)=(|PA|+|PB|)[(|PA|+|PB|)^2-3|PA||PB|]$

$=-(t_1+t_2)[(t_1+t_2)^2-3t_1t_2]$

$=3\sqrt{2}[(3\sqrt{2})^2-3]=45\sqrt{2}$．（10 分）

23. **解**：(1)由 $f(x)=|2x+1|+|2x-5|<8$，

得 $\begin{cases} x\leqslant -\frac{1}{2}, \\ -2x-1-2x+5<8, \end{cases}$

或 $\begin{cases} -\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}, \\ 2x+1-2x+5<8, \end{cases}$

或 $\begin{cases} x\geqslant \frac{5}{2}, \\ 2x+1+2x-5<8, \end{cases}$

解得 $-1<x\leqslant -\frac{1}{2}$，或 $-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$，或 $\frac{5}{2}\leqslant x<3$，

所以原不等式的解集为 $\{x|-1<x<3\}$．（5 分）

(2) $f(x)=|2x+1|+|2x-5|\geqslant|2x+1-(2x-5)|=6$，

当且仅当 $(2x+1)(2x-5)\leqslant 0$，

即 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant \frac{5}{2}$ 时取等号，

即 $f(x)_{\min}=6$，

所以 $|a-2|<6$，即 $-6<a-2<6$，

解得 $a\in(-4,8)$，

所以 a 的取值范围为 $(-4,8)$．（10 分）

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。