

内江市高中 2023 届第三次模拟考试题

数 学(理科)

1. 本试卷包括第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 4 页。全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

2. 答第 I 卷时,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号;答第 II 卷时,用 0.5 毫米的黑色签字笔在答题卡规定的区域内作答,字体工整,笔迹清楚;不能答在试题卷上。

3. 考试结束后,监考员将答题卡收回。

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每个小题所给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把正确选项的代号填在答题卡的指定位置。

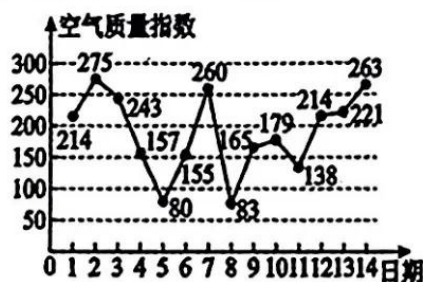
1. 已知复数 $(1+3i)(2z-z)=10$, 其中 i 是虚数单位, $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数, 则 $z =$

- A. $1+i$ B. $1-i$ C. $-1+i$ D. $-1-i$

2. 已知全集 $U=\mathbb{R}$, $M=\{x|x^2-4x+3\leq 0\}$, $N=\{x|\log_2 x\leq 1\}$, 则 $\complement_U(M\cup N) =$

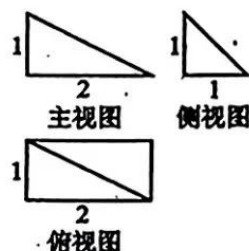
- A. $(-\infty, 0]\cup(3, +\infty)$ B. $(-\infty, 3)$ C. $(-\infty, 1)\cup(3, +\infty)$ D. $(3, +\infty)$

3. 空气质量指数是评估空气质量状况的一组数字, 空气质量指数划分为 $[0, 50)$ 、 $[50, 100)$ 、 $[100, 150)$ 、 $[150, 200)$ 、 $[200, 300)$ 和 $[300, 500)$ 六档, 分别对应“优”、“良”、“轻度污染”、“中度污染”、“重度污染”和“严重污染”六个等级。如图是某市 4 月 1 日至 14 日连续 14 天的空气质量指数趋势图, 则下列说法中正确的是



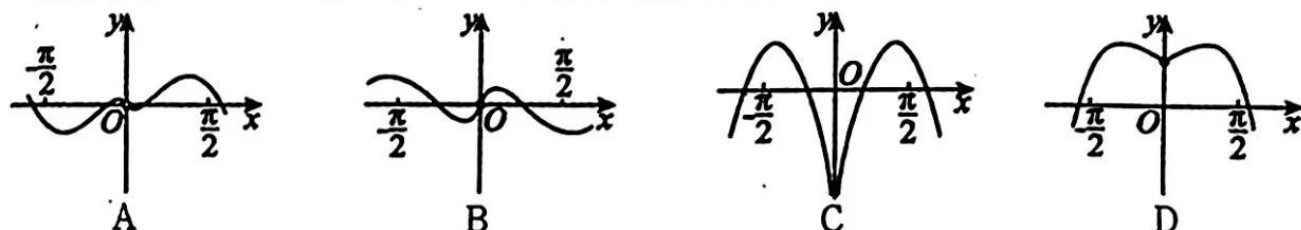
- A. 从 2 日到 5 日空气质量越来越差
B. 这 14 天中空气质量指数的中位数是 214
C. 连续三天中空气质量指数方差最小是 5 日到 7 日
D. 这 14 天中空气质量指数的平均数约为 189

4. 我国古代数学名著《九章算术》中几何模型“阳马”意指底面为矩形, 一侧棱垂直于底面的四棱锥。某“阳马”的三视图如图所示, 则该四棱锥中棱长的最大值为



- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{6}$ D. 2

5. 函数 $f(x) = x\cos x + (\sin x)\ln|x|$ 的部分图像大致为



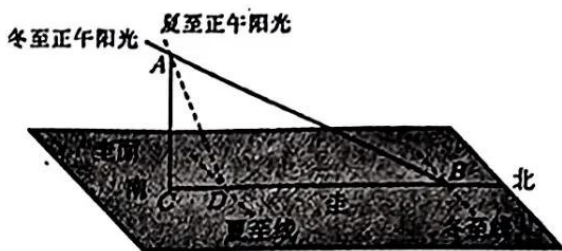
6. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^x} - a$ 和 $g(x) = \frac{\ln x}{x} + b$ 有相同的极大值, 则 $a + b =$

- A. 2 B. 0 C. -3 D. -1

7. 水平桌面上放置了 4 个半径为 2 的小球, 4 个小球的球心构成正方形, 且相邻的两个小球相切. 若用一个半球形的容器罩住四个小球, 则半球形容器内壁的半径的最小值为

- A. 4 B. $2\sqrt{2} + 2$ C. 6 D. $2\sqrt{3} + 2$

8. 圭表是我国古代一种通过测量正午日影长度来推定节气的天文仪器, 它包括一根直立的标竿(称为“表”)和一把呈南北方向水平固定摆放的与标竿垂直的长尺(称为“圭”). 当正午太阳照射在表上时, 日影便会投影在圭面上, 圭面上日影长度最长的那一天定为冬至, 日影长度最短的那一天定为夏至. 如图是一个根据某地的地理位置设计的圭表的示意图, 已知该地冬至正午太阳高度角(即 $\angle ABC$)约为 32.5° , 夏至正午太阳高度角(即 $\angle ADC$)约为 79.5° , 圭面上冬至线与夏至线之间的距离(即 DB 的长)为 14 米, 则表高(即 AC 的长)约为(其中, $\tan 32.5^\circ \approx \frac{3}{5}$, $\tan 79.5^\circ \approx \frac{27}{5}$)



约为(其中, $\tan 32.5^\circ \approx \frac{3}{5}$, $\tan 79.5^\circ \approx \frac{27}{5}$)

- A. 9.27 米 B. 9.33 米 C. 9.45 米 D. 9.51 米

9. 已知圆锥的母线长为 2, 侧面积为 $2\sqrt{3}\pi$, 则过顶点的截面面积的最大值等于

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 3

10. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上有不同的三点 A, B, P , 且 A, B 关于原点对称, 直线 PA, PB 的斜率分别为 k_{PA}, k_{PB} , 且 $k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{3}{4}$, 则离心率 e 的值为

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

11. 将函数 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 若

$(0, \frac{\pi}{\omega})$ 是 $g(x)$ 的一个单调递增区间, 且 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有 5 个零点, 则 $\omega =$

- A. 1 B. 13 C. 9 D. 5

12. 设 $a = \ln \frac{13}{5}, b = \frac{26}{27}, c = \tan \frac{4}{5}$, 则

- A. $c > b > a$ B. $c > a > b$ C. $b > c > a$ D. $a > c > b$

第 II 卷(非选择题, 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3$, 且 $\vec{a} \perp (\vec{a} + 2\vec{b})$, 则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影为_____.

14. 若 $(x+a)^5(2-x^3)$ 的展开式的各项系数和为 32, 则该展开式中 x^4 的系数是_____.

15. 甲、乙两人下围棋, 若甲执黑子先下, 则甲胜的概率为 $\frac{2}{3}$; 若乙执黑子先下, 则乙胜的概率为

$\frac{1}{2}$. 假定每局之间相互独立且无平局, 第二局由上一局负者先下, 若甲、乙比赛两局, 第一局

甲、乙执黑子先下是等可能的,则甲、乙各胜一局的概率为_____.

16. 已知 $A(-1,0), B(3,0)$, P 是圆 $O: x^2 + y^2 = 49$ 上的一个动点,则 $\sin \angle APB$ 的最大值为_____.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且满足 $a_1 = 2, S_{n+1} = 2S_n + 2$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)记 $b_n = \frac{na_n}{(n+1)(n+2)}$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

某厂商调查甲、乙两种不同型号电视机在 10 个卖场的销售量(单位:台),并根据这 10 个卖场的销售情况,得到如图所示的茎叶图.为了鼓励卖场,在同型号电视机的销售中,该厂商将销售量高于数据平均数的卖场命名为该型号电视机的“星级卖场”.

甲	乙
4 8 0 0	1 0 8
7 5 2	2 0 2 3
0	3 1 2 a b
3 1	4 3

(1)当 $a=1, b=0$ 时,记甲型号电视机的“星级卖场”数量为 m ,乙型号电视机的“星级卖场”数量为 n ,比较 m, n 的大小关系;

(2)在这 10 个卖场中,随机选取 2 个卖场,记 X 为其中甲型号电视机的“星级卖场”的个数,求 X 的分布列和数学期望;

(3)记乙型号电视机销售量的方差为 s^2 ,根据茎叶图推断 a 与 b 分别取何值时, s^2 达到最小值.(只需写出结论)

19. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 45^\circ, BC = 3$,过点 A 作 $AD \perp BC$,交线段 BC 于点 D (如图 1),沿 AD 将 $\triangle ABD$ 折起,使 $\angle BDC = 90^\circ$ (如图 2),点 E, M 分别为棱 BC, AC 的中点.

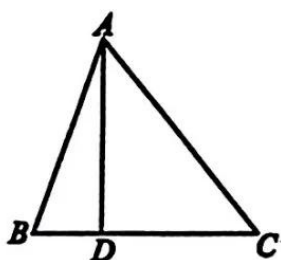


图1

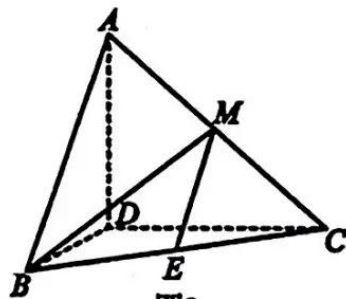


图2

(1)求证: $CD \perp ME$;

(2)给出下列三个条件:①图 1 中 $\tan 2B = -\frac{4}{3}$, ②图 1 中 $\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$, ③图 2 中三

棱锥 $A-BCD$ 的体积最大.

在其中任选一个,补充在下面问题中,再解答问题.

问题:已知_____ (填番号),试在棱 CD 上确定一点 N ,使得 $EN \perp BM$,并求平面 BMN 与平面 CBN 的夹角的余弦值.

注:若选择多个条件分别解答,则按第一个解答计分.

20. (本小题满分 12 分)

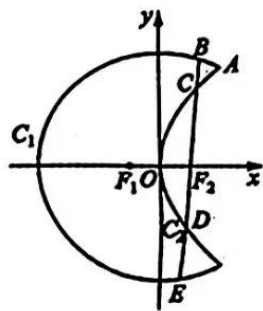
若存在实数 k, b , 使得函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 对其定义域上的任意实数 x 同时满足: $f(x) \geq kx + b$ 且 $g(x) \leq kx + b$, 则称直线 $l: y = kx + b$ 为函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的“隔离直线”. 已知 $f(x) = x^2$, $g(x) = 2e \ln x$ (其中 e 为自然对数的底数). 试问:

(1) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象是否存在公共点, 若存在, 求出公共点坐标; 若不存在, 说明理由;

(2) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否存在“隔离直线”? 若存在, 求出此“隔离直线”的方程; 若不存在, 请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

如图, 曲线 C_1 是以原点 O 为中心, F_1, F_2 为焦点的椭圆的一部分, 曲线 C_2 是以 O 为顶点, F_2 为焦点的抛物线的一部分, A 是曲线 C_1 和 C_2 的一个交点, 且 $\angle AF_2F_1$ 为钝角, $|AF_1| = \frac{7}{2}$, $|AF_2| = \frac{5}{2}$.



(1) 求曲线 C_1 和 C_2 的方程;

(2) 过 F_2 作一条与 x 轴不垂直的直线, 分别和曲线 C_1 和 C_2 交于 B 、

E 、 C 、 D 四点, 若 G 为 CD 的中点, H 为 BE 的中点, $\frac{|BE| \cdot |GF_2|}{|CD| \cdot |HF_2|}$ 是否为定值? 若是, 请求出此定值; 若不是, 请说明理由.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 并用 2B 铅笔将所选题号涂黑. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分)

在平面直角坐标系中, 将曲线 C_1 向左平移 2 个单位, 再将得到的曲线上的每一个点的横坐标保持不变, 纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 得到曲线 C_2 , 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系. 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \alpha$.

(1) 求曲线 C_2 的参数方程;

(2) 已知点 M 在第一象限, 四边形 $MNPQ$ 是曲线 C_2 的内接矩形, 求内接矩形 $MNPQ$ 周长的最大值, 并求周长最大时点 M 的坐标.

23. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = |2x - 4| + |x^2 + a|$ ($x \in \mathbb{R}$).

(1) 若 $a = 1$, 求证: $f(x) \geq 4$;

(2) 若对于任意 $x \in [1, 2]$, 都有 $f(x) \leq 4$, 求实数 a 的取值范围.