

2017 年全国高中数学联赛

山东赛区预赛试题详解

2017 年 9 月 2 日

(一) 填空题 (本大题共 10 个小题, 每小题 8 分, 共 80 分)

(1) 已知复数 z_1, z_2 满足 $|z_1 + z_2| = 20, |z_1^2 + z_2^2| = 16$, 则 $|z_1^3 + z_2^3|$ 的最小值是 _____.

解析: 由已知得: $|z_1^3 + z_2^3| = |z_1 + z_2| \cdot |z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2| = 10 |(z_1 + z_2)^2 - 3(z_1^2 + z_2^2)|$
 $\geq 10 |(z_1 + z_2)^2| - 3|z_1^2 + z_2^2| = 10 |z_1 + z_2|^2 - 3|z_1^2 + z_2^2| = 3520,$

当且仅当 $z_1 + z_2 = 20, z_1^2 + z_2^2 = 16$, 即 $z_{1,2} = 10 \pm 2\sqrt{23}i$ 时等号成立,

故 $|z_1^3 + z_2^3|$ 的最小值是 3520.

(2) 已知集合 $M = \{1, 99, -1, 0, 25, -36, -91, 19, -2, 11\}$, 记集合 M 的所有非空子集为 M_i ,

($i = 1, 2, \dots, 1023$), 每一个 M_i 中所有元素之积为 m_i , 则 $\sum_{i=1}^{1023} m_i =$ _____.

解析: 由于 $M = \{a_i (i = 1, 2, \dots, n)\}$ 时, $\sum_{i=1}^{2^n-1} m_i = \prod_{i=1}^n (a_i + 1) - 1$, 故 $\sum_{i=1}^{1023} m_i = -1$.

(3) 在棱长为 1 的正方体 C 内, 作一个内切大球 O_1 , 再作一个小球 O_2 , 使它与球 O_1 外切, 且与正方体的三个面相切, 则球 O_2 的表面积为 _____.

解析: 作对角截面图得到矩形 BB_1D_1D ,

依题意知 O_1, O_2 都在线段 BD_1 上, 且 O_1 是 BD_1 的中点,

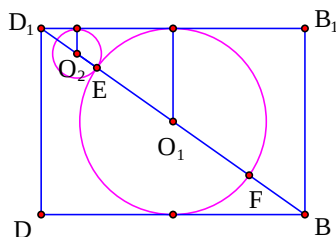
设球 O_1, O_2 的半径分别为 r_1, r_2 ,

$$\text{则 } r_1 = \frac{1}{2}, O_1D_1 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{由 } \frac{O_1D_1}{r_1} = \frac{O_2D_1}{r_2} \text{ 得: } O_2D_1 = \sqrt{3}r_2,$$

$$\therefore O_1D_1 = \sqrt{3}r_2 + r_2 + r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore r_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \therefore S_2 = (7-4\sqrt{3})\pi.$$



(4) 设 $n = \overline{abc}$ 是一个三位数, 其中以 a, b, c 为边可构成一个等腰三角形,

则这样的三位数有 _____ 个.

解析: 当 $a = b = c$ 时, 有 9 种情形;

不是等边的等腰三角形情形, 不妨设 $a = b$,

当 $a = b \geq 5$ 时, c 有 8 种情形, 共有 40 种情形;

当 $a = b = 4$ 时, c 有 6 种情形;

当 $a = b = 3$ 时, c 有 4 种情形;

当 $a = b = 2$ 时, c 有 2 种情形;

综上, 共有 $(40 + 6 + 4 + 2) \times 3 + 9 = 165$ 种情形.

(5) 已知非负实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 8, ab + bc + ca = 16$,

若 $m = \min\{ab, bc, ca\}$, 则 m 的最大值是 _____.

解析: 不妨设 $a \leq b \leq c$, 则 $ab \leq ca \leq bc, m = ab$, $3c \geq a + b + c = 8 \Rightarrow c \geq \frac{8}{3}$,

$$\text{又 } (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = (8 - c)^2 - 4(16 - bc - ca) \geq 0,$$

$$\text{即 } (8 - c)^2 - 4(16 - c(8 - c)) = c(16 - 3c) \geq 0, \text{ 故 } \frac{8}{3} \leq c \leq \frac{16}{3},$$

$$\therefore ab = 16 - ca - bc = 16 - c(8 - c) = (c - 4)^2 \leq \frac{16}{9},$$

当且仅当 $a = b = \frac{4}{3}, c = \frac{16}{3}$ 时等号成立,

因此 m 的最大值是 $\frac{16}{9}$.

(6) 已知三次多项式 $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 满足 $p\left(\frac{1}{2}\right) + p\left(-\frac{1}{2}\right) = 1000p(0)$,

设 x_1, x_2, x_3 是方程 $p(x) = 0$ 的 3 个根, 则 $\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_1x_3} =$ _____.

解析: 由已知得: $\frac{1}{2}b + 2d = 1000d \Rightarrow \frac{b}{d} = 1996$,

由根与系数的关系可得: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$,

$$\therefore \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_1x_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} = \frac{b}{d} = 1996.$$

(7) 函数 $f(x) = \frac{\sin x - 1}{\sqrt{3 - 2\cos x - 2\sin x}}$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 的值域为 _____.

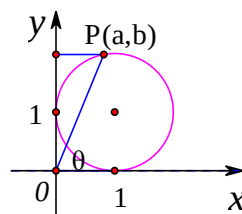
解析: 令 $1 - \sin x = a, 1 - \cos x = b$,

$$\text{则 } f(x) = \frac{-a}{\sqrt{2a+2b-1}} = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(0 \leq a, b \leq 1, (a-1)^2 + (b-1)^2 = 1 \right),$$

故点 $P(a, b)$ 在圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 上,

设直线 OP 的倾斜角为 θ , 则 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$,

于是 $f(x) = -\cos \theta \in [-1, 0]$.



(8) 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心, 且 $3\vec{IA} + 4\vec{IB} + 5\vec{IC} = \vec{0}$,

则角 $C =$ _____.

解析: 作 $\vec{IA_1} = 3\vec{IA}, \vec{IB_1} = 4\vec{IB}, \vec{IC_1} = 5\vec{IC}$,

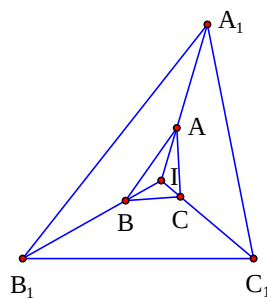
则点 I 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的重心,

$$\therefore S_{\triangle IA_1B_1} = S_{\triangle IB_1C_1} = S_{\triangle IC_1A_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1B_1C_1},$$

$$\therefore S_{\triangle IAB} = \frac{1}{36} S_{\triangle A_1B_1C_1}, S_{\triangle IBC} = \frac{1}{60} S_{\triangle A_1B_1C_1}, S_{\triangle ICA} = \frac{1}{45} S_{\triangle A_1B_1C_1},$$

$$\therefore a:b:c = S_{\triangle IBC} : S_{\triangle ICA} : S_{\triangle IAB} = \frac{1}{60} : \frac{1}{45} : \frac{1}{36} = 3:4:5,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2, \therefore C = \frac{\pi}{2}.$$



(9) 已知正数 x, y, z 满足 $x^2 + y^2 + xy = 1, y^2 + z^2 + yz = 2, z^2 + x^2 + zx = 3$,

则 $x + y + z =$ _____.

解析: 作 $FA = x, FB = y, FC = z$,

且 FA, FB, FC 两两夹角为 120° ,

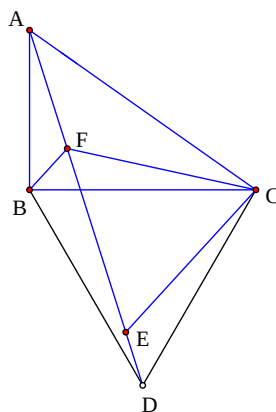
那么点 F 是 $\triangle ABC$ 的费马点,

$$\text{于是 } AB = \sqrt{x^2 + y^2 + xy} = 1,$$

$$BC = \sqrt{y^2 + z^2 + yz} = \sqrt{2},$$

$$CA = \sqrt{z^2 + x^2 + zx} = \sqrt{3},$$

在 $\triangle ABC$ 外作等边 $\triangle BCD$, 在 DF 上取一点 E 使得 $\triangle CEF$ 是等边三角形,



那么 $\triangle BFC \cong \triangle DEC$, $\therefore x + y + z = AD$,

在 $\triangle ABD$ 中运用余弦定理得: $AD = \sqrt{3 + \sqrt{6}}$.

(10) 在一个边长为 a 的正方形草坪的四个角上都安有喷水装置, 喷水装置都可以 90° 旋转喷水, 每个喷水装置都可以从其所在角的一边旋转喷水至该角的另一边, 其有效射程均为 a , 则草坪上能同时被四个喷水装置喷水覆盖的区域占整个草坪的比例为 _____.

解析: 如图所示, 即求曲边四边形 EFGH 占正方形 ABCD 的面积的比例.

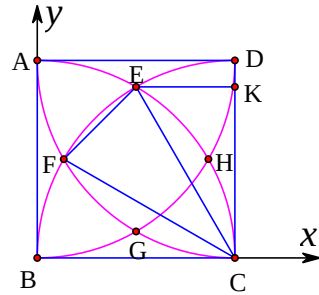
以 B 为原点, BC 所在直线为 x 轴,

BA 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系,

那么弧 AEHC 所在圆的方程为 $x^2 + y^2 = a^2$,

弧 BFED 所在圆的方程为 $(x - a)^2 + y^2 = a^2$,

联立解得: $E\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$,



同理可得: $G\left(\frac{a}{2}, \frac{2 - \sqrt{3}}{2}a\right), F\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}\right), H\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{a}{2}\right)$,

作 $EK \perp CD$ 于 K, 则 $\angle DCE = \angle ECF = \angle FCB = 30^\circ$, $CE = CF = a$,

$$\therefore S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2}a^2 \sin 30^\circ = \frac{1}{4}a^2, S_{\text{扇形}CEF} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}a^2,$$

$$S_{\text{正方形}EFGH} = \left(\frac{a}{2} - \frac{2 - \sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{a}{2}\right)^2 = (2 - \sqrt{3})a^2,$$

$$\therefore S_{\text{凸曲边四边形}EFGH} = S_{\text{正方形}EFGH} + 4(S_{\text{扇形}CEF} - S_{\triangle CEF}) = \left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}\right)a^2,$$

因此草坪上能同时被四个喷水装置喷水覆盖的区域占整个草坪的比例为 $\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$.

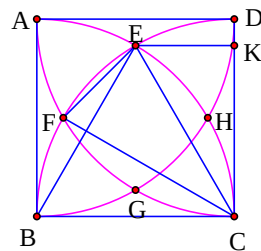
法二: 依对称性知, $\triangle BCE$ 是等边三角形,

作 $EK \perp CD$ 于 K, 则 $EK = \frac{1}{2}a$, $\therefore \angle ECD = 30^\circ$,

同理 $\angle BCF = 30^\circ$, 从而 $\angle ECF = 30^\circ$,

$$\therefore S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2}a^2 \sin 30^\circ = \frac{1}{4}a^2,$$

$$S_{\text{扇形}CEF} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}a^2,$$



$$S_{\text{正方形}EFGH} = \left(\frac{a}{2} - \frac{2-\sqrt{3}}{2}a \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{a}{2} \right)^2 = (2-\sqrt{3})a^2,$$

$$\therefore S_{\text{凸曲边四边形}EFGH} = S_{\text{正方形}EFGH} + 4(S_{\text{扇形}CEF} - S_{\triangle CEF}) = \left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3} \right) a^2,$$

因此草坪上能同时被四个喷水装置喷水覆盖的区域占整个草坪的比例为 $\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$.

(二) 解答题 (本大题共 4 个小题, 前两题各 15 分, 后两题各 20 分, 共 70 分)

(11) (本小题满分 15 分) 已知实数 $x, y \in (1, +\infty)$, 且 $xy - 2x - y + 1 = 0$,

求 $\frac{3}{2}x^2 + y^2$ 的最小值.

解析: 由已知得: $y = \frac{1}{x-1} + 2$, 于是 $\frac{3}{2}x^2 + y^2 = \frac{3}{2}x^2 + \left(\frac{1}{x-1} + 2 \right)^2$,

$$\text{记 } f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \left(\frac{1}{x-1} + 2 \right)^2, \text{ 则 } f'(x) = 3x + 2 \left(\frac{1}{x-1} + 2 \right) \cdot \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{3x(x-1)^3 - 4x + 2}{(x-1)^3} = \frac{3(x-2)(x-1)^3 - 4(x-2) + 6(x-1)^3 - 6}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{3(x-2)(x-1)^3 - 4(x-2) + 6(x-2)(x^2 - x + 1)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{(x-2)(3x^3 - 3x^2 + 3x - 1)}{(x-1)^3} = \frac{(x-2)(3x^2(x-1) + 2x + (x-1))}{(x-1)^3},$$

$\therefore$ 当 $1 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x = 2$ 时, $f'(x) = 0$;

$\therefore f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上是减函数, 在 $(2, +\infty)$ 上是增函数, $\therefore f_{\min}(x) = f(2) = 15$.

法二: 令 $x-1 = m, y-2 = n$, 则 $mn = (x-1)(y-2) = 1, m > 0, n > 0$,

$$\text{于是 } \frac{3}{2}x^2 + y^2 = \frac{3}{2}(m+1)^2 + \left(\frac{1}{m} + 2 \right)^2 = \frac{3}{2}m^2 + \frac{1}{m^2} + 3m + \frac{4}{m} + \frac{3}{2} + 4$$

$$= \left(m^2 + \frac{1}{m^2} \right) + 3 \left(m + \frac{1}{m} \right) + \frac{1}{2} \left(m^2 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right) + \frac{11}{2} \geq 15,$$

当且仅当 $m = 1$ 时, 即 $x = 2, y = 3$ 时等号成立,

因此 $\frac{3}{2}x^2 + y^2$ 的最小值是 15.

(12) (本小题满分 15 分) 已知正实数数列 $\{a_n\}$ 满足:

$$a_{n+1} = a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot \dots \cdot a_n^2 - 3 (n \in N^*), \text{ 且 } \frac{1}{2}(a_1 + \sqrt{a_2 - 1}) \in N^*,$$

$$\text{求证: } \frac{1}{2}(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n + \sqrt{a_{n+1} - 1}) \in N^*.$$

解析: 下面用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时, 由已知得 $\frac{1}{2}(a_1 + \sqrt{a_2 - 1}) \in N^*$, 结论显然成立;

假设当 $n=k$ 时, 结论成立, 即 $\frac{1}{2}(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k + \sqrt{a_{k+1} - 1}) \in N^*$,

记 $t = \frac{1}{2}(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k + \sqrt{a_{k+1} - 1})$, 则 $t \in N^*$,

$$\text{于是得: } a_{k+1} = a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot \dots \cdot a_k^2 - 4t \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k + 4t^2 + 1,$$

$$\text{又 } a_{k+1} = a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot \dots \cdot a_k^2 - 3, \therefore a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k = t + \frac{1}{t}, a_{k+1} = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 3,$$

那么当 $n=k+1$ 时, $\frac{1}{2}(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k \cdot a_{k+1} + \sqrt{a_{k+2} - 1})$

$$= \frac{1}{2}[(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k) \cdot a_{k+1} + \sqrt{a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot \dots \cdot a_k^2 \cdot a_{k+1}^2 - 4}]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(t + \frac{1}{t}\right) \cdot \left(\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 3\right) + \sqrt{\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 \cdot \left(\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 3\right)^2 - 4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(t^3 + \frac{1}{t^3}\right) + \sqrt{\left(t^3 + \frac{1}{t^3}\right)^2 - 4}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(t^3 + \frac{1}{t^3}\right) + \left(t^3 - \frac{1}{t^3}\right)\right] = t^3 \in N^*,$$

因此当 $n=k+1$ 时结论成立;

综上所述, 对任意的自然数 n , 都有 $\frac{1}{2}(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n + \sqrt{a_{n+1} - 1}) \in N^*$ 成立.

(13) (本小题满分 20 分) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $P\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 离心率

$$e = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 动点 } M(2, t) (t > 0).$$

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 求以 OM 为直径且被直线 $3x - 4y - 5 = 0$ 截得的弦长为 2 的圆的方程;

(3) 设 F 是椭圆的右焦点, 过点 F 作直线 OM 的垂线与以 OM 为直径的圆交于点 N, 证明线段 ON 的长为定值, 并求出这个定值.

解析: (1)由已知得: $\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{b^2} = 1, \frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2 = \frac{1}{2},$

联立解得: $a = \sqrt{2}, b = 1$, 故椭圆方程是 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$

(2)由弦心距公式得: $\left(\frac{\left|3 \times 1 - 4 \cdot \frac{t}{2} - 5\right|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}\right)^2 + 1^2 = 1^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2 \Rightarrow t = 4, \left(\text{或 } t = -\frac{4}{9} \text{ 舍}\right),$

故所求圆的方程为 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5;$

(3)设 $N(x_0, y_0)$, 则 $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{MN} = x_0(x_0 - 2) + y_0(y_0 - t) = 0,$

又 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{FN} = 2(x_0 - 1) + ty_0 = 0,$

以上两式相加得: $x_0^2 + y_0^2 - 2 = 0$, 故 $|\overrightarrow{ON}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{2}$ 是定值.

(14) (本小题满分 20 分) 求最大的正整数 n , 将正整数从 1 到 400 任意填入 20×20 的 400 个方格中, 总有一行或一列中的两数之差不小于 n .

解析: 将正方形表格分为 20×10 的两个矩形表格,

然后将 1 到 200 依次逐行按照从小到大的顺序填入左侧表格,

同样将 201 到 400 依次逐行按照从小到大的顺序填入右侧表格,

则在此表格中, 每行中两数之差不大于 209, 每列中两数之差不大于 189,

$\therefore n \leq 209.$

令 $M = \{1, 2, \dots, 91\}, N = \{300, 301, \dots, 400\},$

易知, 若集合 M、N 中各有一个数位于表格的同一行或同一列,

以下不会.