

高三年级第十次调研考试文科数学参考答案

一、选择题

1-5: DDAAC

6-10: CDABB

11-12: CA

二、填空题

13. $y = x - 1$

14. $\frac{4040}{2021}$

15. $\frac{25}{4}$

16. $\frac{27}{4}\pi$

三、解答题

17. 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ,

则 $a_n = -1 + (n-1)d$, $b_n = q^{n-1}$

由题意可得: $\begin{cases} a_2 + b_2 = 3 \\ a_3 + b_3 = 7 \end{cases}$, 则 $\begin{cases} -1 + d + q = 3 \\ -1 + 2d + q^2 = 7 \end{cases}$ 3 分

即 $\begin{cases} d + q = 4 \\ 2d + q^2 = 8 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} d = 2 \\ q = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} d = 4 \\ q = 0 \end{cases}$ (舍去)

因此 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2^{n-1}$ 6 分

(2) 由题意可得: $T_3 = b_1 + b_2 + b_3$, 则 $\begin{cases} T_3 = b_1(1 + q + q^2) = 13 \\ -1 + d + q = 3 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} q = 3 \\ d = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} q = -4 \\ d = 8 \end{cases}$,

$\therefore S_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$ 或 $S_n = 4n^2 - 5n$ 12 分

18. 解: (1) 设抽查人员利用“学习强国”的平均时长为 $\bar{x}$, 中位数为 y

$\bar{x} = 0.05 \times 1 + 0.1 \times 3 + 0.25 \times 5 + 0.3 \times 7 + 0.15 \times 9 + 0.1 \times 11 + 0.05 \times 13 = 6.8$ 3 分

设抽查人员利用“学习强国”的中位数为 y

$0.05 + 0.1 + 0.25 + 0.15 \times (y - 6) = 0.5$, 解得 $y = \frac{20}{3}$ 6 分

即抽查人员利用“学习强国”的平均时长为 6.8, 中位数为 $\frac{20}{3}$.

(2) $[8, 10]$ 组的人数为 $2000 \times 0.15 = 300$ 人, 设抽取的人数为 a

$[10, 12]$ 组的人数为 $2000 \times 0.1 = 200$ 人, 设抽取的人数为 b

则 $\frac{a}{300} = \frac{b}{200} = \frac{50}{500}$, 解得 $a = 30$, $b = 20$

所以在 $[8, 10]$ 和 $[10, 12]$ 两组中分别抽取 30 人和 20 人, 8 分

在抽取 5 人, 两组分别抽取 3 人和 2 人, 将 $[8, 10]$ 组中被抽取的工作人员标记为 A_1, A_2, A_3 ,

将 $[10, 12]$ 中的标记为 B_1, B_2 . 设事件 C 表示从 $[10, 12]$ 小组中至少抽取 1 人,

则抽取的情况如下: $\{A_1, A_2\}, \{A_1, A_3\}, \{A_1, B_1\}, \{A_1, B_2\}, \{A_2, A_3\}, \{A_2, B_1\}, \{A_2, B_2\},$

$\{A_3, B_1\}, \{A_3, B_2\}, \{B_1, B_2\}$ 共 10 种情况, 其中在 $[10, 12]$ 中至少抽取 1 人有 7 种, 则

$$P(C) = \frac{7}{10}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

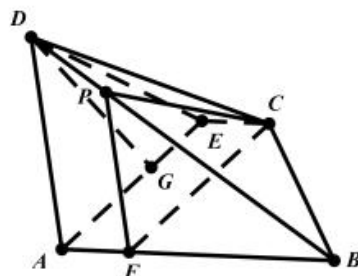
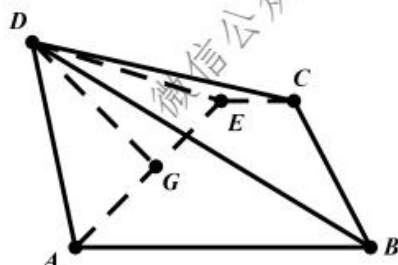
19. 解: (1) 由题意, 要使得四棱锥 $D-ABCE$ 的体积最大, 就要使平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCE$.

设 G 为 AE 中点, 连接 DG . $\because AD = DE = 2, \therefore DG \perp AE, \therefore$ 平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCE$,

平面 $ADE \cap$ 平面 $ABCE = AE, DG \subseteq$ 平面 $ADE, \therefore DG \perp$ 平面 $ABCE$

$\because \angle ADE = 90^\circ$, 则 $AE = 2\sqrt{2}, DG = \sqrt{2} \therefore$ 四棱锥 $D-ABCE$ 的体积的最大值为

$$V_{D-ABCE} = \frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times \frac{(1+4) \times 2}{2} = \frac{5}{3} \sqrt{2}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$



(2) 过点 C 作 $CF \parallel AE$ 交 AB 于点 F , 则 $\frac{AF}{FB} = \frac{1}{3}$,

过点 F 作 $FP \parallel AD$ 交 DB 于点 P , 连接 PC , 则 $\frac{DP}{PB} = \frac{1}{3}$

又 $\because CF \parallel AE, AE \subseteq$ 平面 $ADE, CF \not\subseteq$ 平面 $ADE, \therefore CF \parallel$ 平面 ADE

$\because FP \parallel AD, AD \subseteq$ 平面 $ADE, PF \not\subseteq$ 平面 $ADE, \therefore FP \parallel$ 平面 ADE

又 $\because CF \cap FP = F, AE \cap AD = A, \therefore$ 平面 $ADE \parallel$ 平面 CFP

$\because CP \subseteq$ 平面 $CFP, \therefore CP \parallel$ 平面 ADE

所以在 BD 上存在点 P , 使得 $CP \parallel$ 平面 ADE , 且 $\frac{BP}{BD} = \frac{3}{4}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20. 解: (1) 由题意知, 抛物线的准线方程为: $y = -\frac{p}{2}$ 根据抛物线的定义, $|AF| = 1 + \frac{p}{2} = 3$,

所以 $p = 4$, 故抛物线方程为 $x^2 = 8y$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

点 $F(0, 2)$ 当 $y = 1$ 时, $x_0 = \pm 2\sqrt{2}$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 由 (1) 知, 直线 l 的方程为 $y = \frac{3}{4}x + 2$,

$$\text{联立} \begin{cases} x^2 = 8y \\ y = \frac{3}{4}x + 2 \end{cases}, \text{得 } x^2 - 6x - 16 = 0, \text{解得 } x_1 = -2, x_2 = 8.$$

$$\text{所以 } M\left(-2, \frac{1}{2}\right), N(8, 8). \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

设点 Q 的坐标为 (x_3, y_3) , 则 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + t\overrightarrow{ON}$ 得

$$(x_3, y_3) = \left(-2, \frac{1}{2}\right) + t(8, 8) = \left(8t - 2, 8t + \frac{1}{2}\right) \text{ 所以, } \begin{cases} x_3 = 8t - 2 \\ y_3 = 8t + \frac{1}{2} \end{cases}$$

又因为点 Q 在抛物线 $x^2 = 8y$ 上, 所以 $(8t - 2)^2 = 8\left(8t + \frac{1}{2}\right)$. 解得 $t = \frac{3}{2}$ 或 $t = 0$ (舍去).

$$\text{总之 } t = \frac{3}{2}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$21. \text{解: (1) } \because f(x) = \ln x - x, \therefore f'(x) = \frac{1}{x} - 1, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 则 } x = 1,$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } (0, 1) \nearrow, \text{ 在 } [1, +\infty) \searrow. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

当 $t \geq 1$ 时, $f(x)$ 在 $[t, t+1]$ 上单调递减, $f(x)$ 的最大值为 $f(t) = \ln t - t$;

当 $0 < t < 1$ 时, $f(x)$ 在区间 $(t, 1)$ 上为增函数, 在区间 $(1, t+1)$ 上为减函数, $f(x)$ 的最小值

$$\text{为 } f(1) = -1. \text{ 综上, } M(t) = \begin{cases} -1, 0 < t < 1 \\ \ln t - t, t \geq 1 \end{cases}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) f(x_1) + f(x_2) = x_1^2 + x_2^2 - (x_1 + x_2) + \ln x_1 x_2 = 1 - \ln 2,$$

$$\text{即 } (x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2) = 2x_1 x_2 - \ln x_1 x_2 + 1 - \ln 2,$$

$$\text{令 } h(x) = 2x - \ln x + 1 - \ln 2, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$h'(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}, \quad \text{故 } h(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ 上单调递减, 在 } \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \text{ 上单调递增, 故}$$

$$h(x) \geq h\left(\frac{1}{2}\right) = 2, \text{ 即 } (x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2) \geq 2, \text{ 即有 } (x_1 + x_2 - 2)(x_1 + x_2 + 1) \geq 0, \text{ 因为}$$

$$x_1, x_2 > 0, \text{ 所以 } x_1 + x_2 \geq 2. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22.解: (1) 由
$$\begin{cases} x = \frac{-1+t}{1+t} = \frac{(1+t)-2}{1+t} = 1 - \frac{2}{1+t}, \\ y = \frac{t}{1+t} = \frac{(1+t)-1}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}), \text{ 得 } x \neq 1.$$

消去参数 t , 得 l 的普通方程为 $x - 2y + 1 = 0 (x \neq 1)$;3 分 (没写 $x \neq 1$ 扣一分)

将 $\rho^2 = \frac{12}{3 + \sin^2 \theta}$ 去分母得 $3\rho^2 + \rho^2 \sin^2 \theta = 12$, 将 $y = \rho \sin \theta, \rho^2 = x^2 + y^2$ 代入,

得 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 所以曲线 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$5 分

(2) 由 (1) 可设曲线 C 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 2 \cos \alpha, \\ y = \sqrt{3} \sin \alpha \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数}),$$

则曲线 C 上的点到 l 的距离 $d = \frac{|2 \cos \alpha - 2\sqrt{3} \sin \alpha + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|4 \cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) + 1|}{\sqrt{5}},$

当 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) = 1$, 即 $\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时, $d_{\max} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5},$

此时,
$$\begin{cases} x = 2 \cos(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = 1, \\ y = \sqrt{3} \sin(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

所以曲线 C 上的点到直线 l 距离的最大值为 $\sqrt{5},$

该点坐标为 $(1, -\frac{3}{2}).$ 10 分

23.解析: (1) 如图, 平面区域 Ω 由一个正方形及其内部组成, 四个顶点分别为 $(1,0), (2,1), (1,2), (0,1)$, 所以

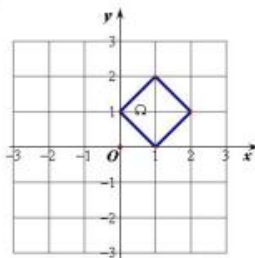
$S = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2.$ 5 分

(2) 由 (1) $(a+c)(b+c) = 2,$

而 a, b, c 都为正数, 所以

$a + 2b + 3c = a + c + 2(b+c) \geq 2\sqrt{2(a+c)(b+c)} = 4$

当且仅当 $a+c = 2(b+c) = 2$ 取得最小值.10 分



自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注