

## 2024 届高三名校 9 月联合测评

### 数学试题 参考答案及多维细目表

题号	1	2	3	4	5	6
答案	B	A	D	C	C	A
题号	7	8	9	10	11	12
答案	A	A	BC	ACD	ABD	BCD

1.【答案】B

【解析】 $\because A = \{x | x > \ln 2\}, B = \{x | 0 \leq x < 81\}$ ,  
故  $A \cap B = \{x | \ln 2 < x < 81\}$ .

2.【答案】A

【解析】设  $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ , 代入  $\frac{z + \bar{z}}{z - \bar{z}} = i$ , 化简得  $\frac{a}{bi} = i$ , 即  $\frac{a}{b} = -1$ .

3.【答案】D

【解析】由  $a + b + \frac{c}{2} = 0$  可知  $a + b = -\frac{c}{2}$ ,  
两边同时平方得  $2 + 2a \cdot b = \frac{1}{4}$ ,  $\therefore a \cdot b = -\frac{7}{8}$ ,  
故  $|a - b| = \sqrt{a^2 - 2a \cdot b + b^2} = \sqrt{2 - 2a \cdot b} = \frac{\sqrt{15}}{2}$ .

4.【答案】C

【解析】依题意可得圆心坐标为  $(1, 1)$ , 又  $(-2, 0)$  关于  $y$  轴的对称点为  $(2, 0)$ , 由平面镜反射原理, 反射光线过  $(2, 0)$  且与该圆相切, 又  $(2, 0)$  在该圆上, 故反射光线的斜率为  $\frac{-1}{\frac{0-1}{2-1}} = 1$ .

5.【答案】C

【解析】设公比为  $q$ , 由题意  $2\left(\frac{a_2}{q} + a_2 + a_2 q\right) = 7a_2$ , 且  $a_2 \neq 0$ ,  $\therefore \frac{1}{q} + q = \frac{5}{2}$ , 解得  $q = \frac{1}{2}$  或  $q = 2$ ,  
 $\therefore \frac{S_4}{a_2} = \frac{a_1(1-q^4)}{a_1(1-q)q} = (1+q)\left(\frac{1}{q} + q\right) = \frac{5}{2}(1+q)$ ,  
故  $\frac{S_4}{a_2} = \frac{15}{2}$  或  $\frac{15}{4}$ .

6.【答案】A

【解析】设圆锥  $SO$  的底面半径为  $r$ ,  $\because$  圆锥  $SO$  的轴截面为正三角形, 故圆锥  $SO$  的高为  $\sqrt{3}r$ , 设圆  $O_1$  的半径为  $x$ , 故圆锥  $SO_1$  的高为  $\sqrt{3}x$ ,

$\because$  圆锥  $SO_1$  与圆台  $O_1O$  的体积之比为  $1:7$ ,

$\therefore$  圆锥  $SO_1$  与圆锥  $SO$  的体积之比为  $1:8$ ,

从而有  $r = \sqrt[3]{8}x = 2x$ ,

$\therefore$  圆锥  $SO_1$  的表面积为  $\pi x \cdot 2x + \pi x^2 = \frac{3\pi r^2}{4}$ ,

圆台  $O_1O$  的表面积为  $\pi x^2 + \pi r^2 + \pi r \cdot 2r - \pi x \cdot 2x = \frac{11\pi r^2}{4}$ ,

故圆锥  $SO_1$  与圆台  $O_1O$  的表面积之比为  $\frac{3}{11}$ .

7.【答案】A

【解析】 $XY$  的分布列为

$XY$	1	2	4
$P$	$p(1-p)$	$p^2 + (1-p)^2$	$p(1-p)$

$E(XY) = 1 \times p(1-p) + 2 \times [p^2 + (1-p)^2] + 4 \times p(1-p) = -p^2 + p + 2$ ,

$E(X) = 2 - p, E(Y) = p + 1$ ,

$Cov(X, Y) = -p^2 + p + 2 - (2-p)(1+p) = 0$ .

8.【答案】A

【解析】当  $x = y = 0$ , 等式成立. 故 D 成立. 若

$2(e^{2y} - e^x) = (y-x)(y+x+2)$ , 则  $e^{2y} - \frac{y^2}{2} - y =$

$e^x - \frac{x^2}{2} - x$ , 设  $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x$ , 则  $f'(x) =$

$e^x - x - 1 \geq 0$ ,  $\therefore f(x)$  单调递增, 当  $y > 0$  时,

$e^x - \frac{x^2}{2} - x = e^{2y} - \frac{y^2}{2} - y > e^y - \frac{y^2}{2} - y$ , 即  $f(x) >$

$f(y)$ ,  $\therefore x > y > 0$ ; 故 B 成立, A 不成立; 当

$y < 0$ ,  $e^x - \frac{x^2}{2} - x = e^{2y} - \frac{y^2}{2} - y < e^y - \frac{y^2}{2} - y$ , 即

$f(x) < f(y)$ ,  $\therefore x < y < 0$ , 故 C 成立.

9.【答案】BC

【解析】设原样本数据的样本平均数为  $\bar{x}$ , 故新样本数据的样本平均数为  $a\bar{x} + b$ , 其中  $\bar{x}$  与  $a\bar{x} + b$  大小无法判断, 故 A 错误;

设原样本数据的标准差为  $\sigma$ , 故新样本数据的标准差为  $a\sigma \leq \sigma$ , 故 B 正确;

新样本数据的极差为  $a(x_{\max} - x_{\min}) \leq (x_{\max} - x_{\min})$ , 故 C 正确;

设原样本数据的上四分位数为  $x_0$ , 故新样本数据的上四分位数为  $ax_0 + b$ , 其中  $x_0$  与  $ax_0 + b$  大小无法判断, 故 D 错误.

10. 【答案】ACD

【解析】若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则其密度函数  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ , 因此  $X$  的密度曲线与  $y$  轴只有一个交点  $(0, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}})$ , 故 A 正确;

$X$  的密度曲线关于直线  $x = \mu$  对称, 故 B 错误;

$P(|X - \mu| > 3\sigma) = P(X < \mu - 3\sigma) + P(X > \mu + 3\sigma) = 2P(X > \mu + 3\sigma)$ , 故 C 正确;

$E(Y) = \frac{E(X) - \mu}{\sigma} = 0, D(Y) = \frac{1}{\sigma^2} D(X) = 1$ , 故 D 正确.

11. 【答案】ABD

【解析】由题意  $\frac{\pi}{4} = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega}$ , 故  $\omega = 2$ ,

又  $y = f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位得到

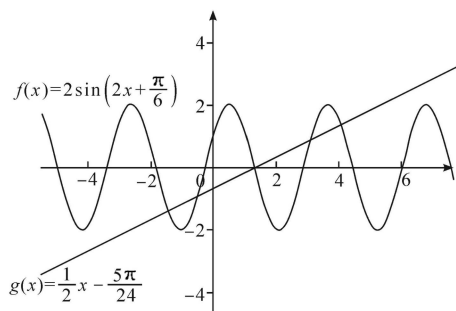
$y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3} + \varphi)$ ,  $\therefore \frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ , 且  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , 故  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ , 故 A 正确;

$\therefore f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ ,

且  $f(\frac{2\pi}{3}) = 2\sin(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) = -2$  为极小值,

$\therefore$  直线  $x = \frac{2\pi}{3}$  为曲线  $y = f(x)$  的一条对称轴, 故 B 正确;

易知  $f(x)$  在  $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$  单调递增, 故  $0 < a \leq \frac{\pi}{6}$ , 故 C 错误;



直线  $y = \frac{1}{2}x - \frac{5\pi}{24}$  与曲线  $y = f(x)$  均过点

$(\frac{5\pi}{12}, 0)$ , 且该直线与曲线  $y = f(x)$  均关于该点

中心对称, 当  $x = \frac{7\pi}{6}$  时,  $y = \frac{3\pi}{8} < 2$ , 当  $x = \frac{13\pi}{6}$

时,  $y = \frac{7\pi}{8} > 2$ , 由对称性可知曲线  $y = f(x)$  与

直线  $y = \frac{1}{2}x - \frac{5\pi}{24}$  有且仅有 5 个交点, 故 D 正确.

12. 【答案】BCD

【解析】由题意得  $a_{p,q} = C_p^{q-1}$ ,

对于 A:  $a_{2,023,2}$  即为第 2 023 行第 2 个数,

$\therefore a_{2,023,2} = C_2^{022} = 2\ 022$ , 故 A 错误;

对于 B:  $(10+x)^3$  展开式的通项为  $T_{k+1} =$

$C_3^k 10^{3-k} x^k$ , 其中  $C_3^0 = a_{4,1}, C_3^1 = a_{4,2}, C_3^2 = a_{4,3},$

$C_3^3 = a_{4,4}, \therefore \sum_{i=1}^4 a_{4,i} 10^{4-i} = C_3^0 10^3 + C_3^1 10^2 +$

$C_3^2 10^1 + C_3^3 10^0 = (10+1)^3 = 1\ 331$ , 故 B 正确;

对于 C:  $S_1 = S_2 = 1, S_3 = 2, S_4 = 3, S_5 = 5, \dots,$

归纳证明可得  $S_{n+2} - S_{n+1} = S_n, \therefore S_5 = 34$ , 故 C 正确;

对于 D:  $\sum_{i=1}^{2\ 021} S_i = S_3 - S_2 + S_4 - S_3 + S_5 - S_4 +$

$\dots + S_{2\ 023} - S_{2\ 022} = S_{2\ 023} - S_2, \therefore S_{2\ 023} - \sum_{i=1}^{2\ 021} S_i$

$= 1$ , 该景点入场码为 13311, 故 D 正确. 故选 BCD.

13. 【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】依题意  $f(\frac{1}{3}) = \log_3 \frac{1}{3} = -1$ ,

$\therefore f(f(\frac{1}{3})) = f(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ .

14. 【答案】 $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

【解析】 $\because \sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha = 2\sin(\alpha + 30^\circ) = \frac{6}{5}$ ,

$\therefore \sin(\alpha + 30^\circ) = \frac{3}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 又  $0 < \alpha < 90^\circ$ ,

$\therefore 30^\circ < \alpha + 30^\circ < 45^\circ$ , 即  $\cos(\alpha + 30^\circ) = \frac{4}{5}$ ,

故  $\sin(\alpha - 15^\circ) = \sin[(\alpha + 30^\circ) - 45^\circ] = \frac{3}{5} \times$

$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$ .

15. 【答案】 $\frac{9}{11}$

【解析】设下午打篮球为事件 A, 晚上跑步为事

件 B, 易知  $P(A) = P(AB) = \frac{3}{4}, P(B|\bar{A}) = \frac{2}{3}$ ,

$$\begin{aligned} \therefore P(B) &= P(AB) + P(\overline{AB}) = P(A) + P(\overline{A}) \cdot \\ P(B|\overline{A}) &= \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{12}, \\ \therefore P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{9}{11}. \end{aligned}$$

16. 【答案】  $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$

【解析】不妨设椭圆  $C$  的离心率为  $e$ , 焦距为  $2c$ , 点  $P, Q$  分别位于第一、三象限, 连接  $PF_1, PF_2, QF_1, QF_2$ , 并结合图形对称性, 可知四边形为对角线长度相等的平行四边形, 即矩形, 因此  $\angle F_1PF_2$  为直角, 且  $\triangle PF_2Q$  的面积与  $\triangle F_1PF_2$  的面积相等, 若椭圆上存在点  $P$  使得  $\angle F_1PF_2$  为直角, 则上顶点  $B$  处应满足  $\angle F_1BF_2 \geq \frac{\pi}{2}$ ,

$$\text{也即 } \frac{c}{b} \geq 1, \text{ 解得 } e \geq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

在  $\text{Rt}\triangle F_1PF_2$  中, 由勾股定理,  
 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (2c)^2$ ,  
且  $(|PF_1| + |PF_2|)^2 = (2a)^2$ ,  
合并化简, 得  $|PF_1| \cdot |PF_2| = 2b^2$ ,

$$\text{则 } \text{Rt}\triangle F_1PF_2 \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| = b^2,$$

$$\text{因此 } b^2 \geq \frac{1}{8} |PQ|^2 = \frac{1}{2} c^2, \text{ 即 } e \leq \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore e \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right].$$

17. 解: (1) 由题意  $S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{4} ab \tan C$ ,

$$\therefore \frac{\sin C}{\tan C} = \cos C = \frac{1}{2},$$

$$\because C \in (0, \pi), \therefore C = \frac{\pi}{3}; \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 由余弦定理:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 +$

$$b^2 - ab, \text{ 又 } S = \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4} ab,$$

$$\therefore ab = \frac{2}{3}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$\therefore D$  为边  $AB$  的中点,

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CB}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

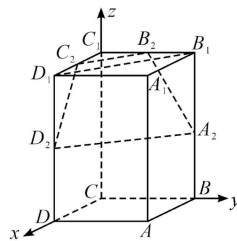
$$\therefore |\overrightarrow{CD}|^2 = \frac{1}{4} (b^2 + a^2 + ab) = \frac{1}{4} (c^2 + 2ab) = \frac{7}{12},$$

$$CD = \frac{\sqrt{21}}{6}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 解: (1) 连接  $B_2C_2, B_1D_1, A_2D_2$ ,

$\therefore A_2, B_2, C_2, D_2$  均为所在棱的中点,

$\therefore A_2B_1 \parallel D_1D_2$  且  $A_2B_1 = D_1D_2$ , 即四边形  $A_2B_1D_1D_2$  为平行四边形, 故  $B_1D_1 \parallel A_2D_2$ , 又  $B_2C_2 \parallel B_1D_1$ , 即  $B_2C_2 \parallel A_2D_2$ ,  $\therefore A_2, B_2, C_2, D_2$  四点在同一个平面;  $\dots$  4 分  
(2) 在正四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $CB, CD, CC_1$  两两垂直, 故以  $\{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CC_1}\}$  为一组正交基底, 建立空间直角坐标系  $C-xyz$ ,



由  $AB=BC=2, AA_1=4$ ,  
易得  $\overrightarrow{B_2A_2} = (0, 1, -2), \overrightarrow{C_2B_2} = (-1, 1, 0)$ ,  
设  $CP=t (0 \leq t \leq 4)$ ,  
故  $\overrightarrow{A_1P} = (-2, -2, t-4), \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

又  $A_1P \perp$  平面  $A_2B_2C_2D_2$ , 故  $\begin{cases} \overrightarrow{A_1P} \cdot \overrightarrow{B_2A_2} = 0, \\ \overrightarrow{A_1P} \cdot \overrightarrow{C_2B_2} = 0, \end{cases}$   
即  $-2 + (-2)(t-4) = 0$ , 即  $t=3$ ,

$\therefore CP=3, AP = \sqrt{CP^2 + AC^2} = \sqrt{17}. \dots$  8 分  
 $\therefore AB \perp$  平面  $B_1BCC_1$ ,  
 $\therefore \angle APB$  为  $AP$  与平面  $B_1BCC_1$  所成角,

$\therefore \sin \angle APB = \frac{AB}{AP} = \frac{2}{\sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{17}}{17}$ , 即  $AP$  与平面  $B_1BCC_1$  所成角的正弦值为  $\frac{2\sqrt{17}}{17}. \dots$  12 分

19. 解: (1)  $\because 2(S_n - n) = na_n, 2[S_{n-1} - (n-1)] = (n-1)a_{n-1} (n \geq 2)$ ,

$$\text{作差得 } (n-2)a_n - (n-1)a_{n-1} = -2, \text{ ①}$$

$$\text{同理 } (n-1)a_{n+1} - na_n = -2, \text{ ② } \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

② - ① 得  $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n, n \geq 2$ ,  
即  $\{a_n\}$  为等差数列;  $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 令  $n=1$ , 则  $2(S_1 - 1) = a_1$ , 解得  $a_1=2$ ,  
设  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 故  $a_n = 2 + (n-1)d$ ,  
 $\therefore a_1 + a_3 + \dots + a_{13} = 7 \times 2 + 2d(1+2+\dots+6) = 14 + 42d = 98$ , 故  $d=2, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$\therefore S_n = \frac{2+2n}{2}n = n^2 + n, \frac{1}{S_n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\therefore \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_n} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (1) 当  $a=e$  时,  $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}x^2 - 2x$ ,

$$f(1) = -\frac{3}{2}, f'(x) = \frac{1}{x} + x - 2, f'(1) = 0,$$

∴切线方程为  $y - \left(-\frac{3}{2}\right) = 0 \times (x-1)$ ,

即  $y = -\frac{3}{2}$ ; ..... 4分

$$(2) f'(x) = \frac{1}{x \ln a} + x - \frac{1 + \ln a}{\ln a} = \frac{x^2 \ln a - (1 + \ln a)x + 1}{x \ln a} = \frac{(x \ln a - 1)(x - 1)}{x \ln a}$$

令  $f'(x) = 0$ , 则  $x = 1$  或  $x = \frac{1}{\ln a}$ , ..... 6分

①当  $1 < a < e$  时,  $\frac{1}{\ln a} > 1$ ,

可知  $f(x)$  在  $(0, 1)$  单调递增, 在  $(1, \frac{1}{\ln a})$  单调

递减, 在  $(\frac{1}{\ln a}, +\infty)$  单调递增,

故  $x = 1$  为  $f(x)$  的极大值点, 不符合条件; ... 8分

②当  $a = e$  时,  $f'(x) \geq 0$ , 无极值点; ..... 10分

③当  $a > e$  时,  $\frac{1}{\ln a} < 1$ ,

可知  $f(x)$  在  $(0, \frac{1}{\ln a})$  单调递增, 在  $(\frac{1}{\ln a}, 1)$  单

调递减, 在  $(1, +\infty)$  单调递增,

故  $x = 1$  为  $f(x)$  的极小值点, 符合条件;

综上,  $a$  的取值范围为  $\{a | a > e\}$ . ..... 12分

21. 解: (1) 设  $Z_i = \frac{X_i}{5}$ , 故  $Z_i \sim B\left(i, \frac{1}{3}\right)$ ,

$$\therefore E(X_i) = 5E(Z_i) = \frac{5i}{3},$$

故  $E(X_{99}) = 5 \times 99 \times \frac{1}{3} = 165$ ; ..... 4分

(2) 由(1)知  $E(X_i) = \frac{5i}{3}$ , 记乙同学的答题次数为  $\xi$ , 且  $\xi$  的所有可能取值为  $1, 2, \dots, n$ ,

$$\text{且 } P(\xi=1) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, P(\xi=2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} =$$

$$\frac{2}{9}, \dots, P(\xi=n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}, \dots \dots \dots 6分$$

$$\therefore E(Y) = (1-1) \times 20 \times \frac{1}{3} + (2-1) \times 20 \times \frac{2}{9}$$

$$+ \dots + (n-1) \times 20 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}, \dots \dots \dots 8分$$

$$\text{且 } \frac{2}{3}E(Y) = (1-1) \times 20 \times \frac{2}{9} + \dots + (n-2) \times$$

$$20 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3} + (n-1) \times 20 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{3},$$

$$E(Y) = 20 \times \left[ \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right] -$$

$$(n-1) \times 20 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= 20 \times \frac{\frac{2}{3} \times \left[ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right]}{1 - \frac{2}{3}} - (n-1) \times 20 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= 40 - (20n+40) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n < 40, \dots \dots \dots 11分$$

∴当  $i > 24$  时,  $E(X_i) > 40 > E(Y)$ . ..... 12分

22. 解: (1) 由题意可知直线  $AB$  的方程为  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}y +$

$\frac{p}{2}$ , 设点  $A(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ , 且  $|AB| = x_1 +$

$$\frac{p}{2} - 1 = \frac{y_1^2}{2p} + \frac{p}{2} - 1, |CD| = x_2 + \frac{p}{2} - 1 = \frac{y_2^2}{2p} +$$

$$\frac{p}{2} - 1, \text{联立} \begin{cases} y^2 = 2px, \\ x = \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{p}{2}, \end{cases}$$

$$\text{消去 } x \text{ 得 } y^2 - \frac{2\sqrt{3}p}{3}y - p^2 = 0,$$

$$\therefore y_1 = \sqrt{3}p, y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}p,$$

$$\text{且 } \frac{y_1^2}{2p} + \frac{p}{2} - 1 = 9\left(\frac{y_2^2}{2p} + \frac{p}{2} - 1\right),$$

∴  $p = 2$ , 即  $E: y^2 = 4x$ ; ..... 4分

(2) 由(1)知圆  $F: (x-1)^2 + y^2 = 1$ ,

设点  $T(4a^2, 4a), P(4b^2, 4b), Q(4c^2, 4c)$ ,

则直线  $PT$  的方程为  $x - (a+b)y + 4ab = 0$ ,

直线  $PQ$  的方程为  $x - (b+c)y + 4bc = 0$ ,

直线  $PQ$  与坐标轴的交点为  $(-4bc, 0), \left(0, \frac{4bc}{b+c}\right)$ ,

则  $\triangle MON$  的面积为  $-\frac{8b^2c^2}{b+c}$ , ..... 6分

$$\text{点 } F \text{ 到直线 } PT \text{ 的距离为 } \frac{|1+4ab|}{\sqrt{(a+b)^2+1}} = 1,$$

$$\text{即 } (16a^2-1)b^2 + 6ab - a^2 = 0,$$

$$\text{同理 } (16a^2-1)c^2 + 6ac - a^2 = 0,$$

$$\text{故 } b+c = -\frac{6a}{16a^2-1}, bc = -\frac{a^2}{16a^2-1} < 0,$$

$$\text{即 } a > \frac{1}{4}, \text{且 } \triangle MON \text{ 的面积为 } \frac{4a^3}{3(16a^2-1)},$$

..... 9分

$$\text{设 } f(a) = \frac{4a^3}{3(16a^2-1)}, \text{故 } f'(a) = \frac{4a^2(16a^2-3)}{3(16a^2-1)^2},$$

令  $f'(a) = 0$ , 则  $a = \frac{\sqrt{3}}{4}$ , 且  $f(a)$  在  $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$  上

单调递减, 在  $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, +\infty\right)$  上单调递增,

故  $\triangle MON$  面积的最小值为  $f\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{32}$ . ..... 12分



## 多维细目表

题型	题号	分值	必备知识	学科素养						预估难度		
				数学抽象	逻辑推理	数学建模	直观想象	数学运算	数据分析	易	中	难
选择题	1	5	集合的运算					√	√	√		
选择题	2	5	复数的四则运算		√			√		√		
选择题	3	5	平面向量模长		√			√	√	√		
选择题	4	5	直线与圆	√		√		√		√		
选择题	5	5	等比数列				√	√			√	
选择题	6	5	圆锥与圆台表面积的计算		√	√		√			√	
选择题	7	5	分布列的期望		√		√	√	√		√	
选择题	8	5	函数与导数	√	√			√				√
选择题	9	5	样本数字特征				√		√	√		
选择题	10	5	正态分布函数的性质			√	√		√	√		
选择题	11	5	三角函数的图像与性质		√		√	√			√	
选择题	12	5	二项式定理与数列结合	√	√	√		√				√
填空题	13	5	分段函数					√		√		
填空题	14	5	三角恒等变换		√		√	√			√	
填空题	15	5	条件概率			√	√	√			√	
填空题	16	5	椭圆离心率问题			√	√	√				√
解答题	17	10	解三角余弦定理的应用		√		√	√		√		
解答题	18	12	立体几何	√		√		√		√		
解答题	19	12	数列裂项求和	√				√			√	
解答题	20	12	函数与导数			√		√	√		√	
解答题	21	12	概率与数列结合	√	√	√		√				√
解答题	22	12	抛物线面积最值问题	√	√		√	√				√

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

