

2021—2022 学年度高二开学分班考试 (二)

数学·全解全析

1. C 【详解】由题得 $\vec{a} - \vec{b} = (2, 2)$,因为 $\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线,所以 $2m - 2 \times (-1) = 0$,解得 $m = -1$.

故选: C.

2. C 【详解】

对于 A, 向量是既有大小又有方向的量, 单位向量只是模相等, 故 A 错误;

对于 B, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角不确定, 故 B 错误;

对于 C, 由向量数乘的定义可知正确;

对于 D, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 说明 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直, 故 D 错误;

故选: C.

3. A 【详解】

因为 $\left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 1 - \sin \alpha = \frac{1}{25}$,所以 $\sin \alpha = \frac{24}{25}$.

故选: A

4. C 【详解】

因为 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 故 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$,所以 $\sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$.

故选: C.

5. C 【详解】

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得, $\frac{\sin C + \sin A}{\sin B} = \frac{c + a}{b}$,

$$\text{又 } \frac{b}{a-c} = \frac{\sin C + \sin A}{\sin B}, \text{ 所以 } \frac{b}{a-c} = \frac{c+a}{b},$$

$$\text{整理得 } b^2 + c^2 = a^2.$$

所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

故选: C.

6. D 【详解】

设 $AB=x$ 米, 在直角 $\triangle ACB$ 中 $\angle ACB=45^\circ$, 所以 $BC=AB=x$ 米.

$$\text{在直角 } \triangle ABD \text{ 中, } \angle D=30^\circ, \tan \angle D = \frac{AB}{BD}, \therefore BD = \frac{AB}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x.$$

$$\because BD - BC = CD,$$

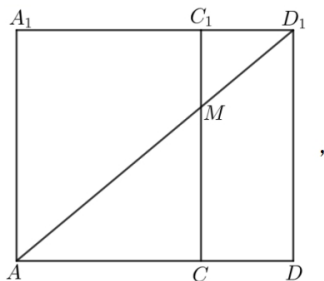
$$\therefore \sqrt{3}x - x = 100, \text{ 解得: } x = 50(\sqrt{3} + 1).$$

故选: D

7. C 【详解】

由题意将平面 DCC_1D_1 展开到矩形 ACC_1A_1 所在平面, 结合展开图可知当 A, M, D_1 三点共

线时, $MD_1 + MA$ 取得最小值, 最小值为展开图中 D_1A 的长度, 求出展开图中 D_1A 的长度即可.



当 A, M, D_1 三点共线时, $MD_1 + MA$ 取得最小值, 最小值为展开图中 D_1A 的长度, 因为

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2, \quad CD = 1, \text{ 所以展开图中 } AD = 3, \text{ 又因为 } DD_1 = CC_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{所以展开图中 } D_1A = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{6}}{2},$$

故选: C.

8. D 【详解】

前 200 名学生中 A 校人数 $200 \times 46\% = 92$ 人, C 校人数 $200 \times 20\% = 40$ 人,

$92 > 40 \times 2 = 80$, 故 A 一定正确;

前 100 名学生中 A 校人数约为 $29 + 25 = 54$ 人, 超过半数的 50 人, 故 B 一定正确;

成绩前 150 名以内的学生中 A 校人数约为 $29 + 25 + 21 = 75$ 人, B 校人数最多全在这个范围,

有 $34\% \times 200 = 68$ 人, 所以 C 校至少有 $150 - 75 - 68 = 7$ 人, 又 $\because$ 成绩前 200 名学生中 C

校人数为 40 人, 所以 C 校至多有 $40 - 7 = 33$ 人测试成绩前 151—200 名之间, 故 C 一定正确;

测试成绩前 51—100 名学生中 A 校人数约为 25 人, 这 200 名学生中 B 校学生总数为

$200 \times 34\% = 68$ 人, 有可能也有 25 人在 51—100 名之间, 故 D 不一定正确,

故选: D.

9. ABC 【详解】

解: 由题可知, 2013—2020 年我国农村每年减贫人数均大于 0, 因此贫困人口逐年减少, 故

选项 A 正确;

2013—2019 年我国农村每年减贫人数的平均值为

$$\frac{1650 + 1232 + 1442 + 1240 + 1289 + 1386 + 1109}{7} = \frac{9348}{7} \text{ (万人)}, \text{ 又 } \frac{9348}{7} > 1300, \text{ 故选项 B 正确;}$$

2017 年末我国农村贫困人口为 $551 + 1109 + 1386 = 3046$ (万人), 故选项 C 正确;

由于 2013—2019 年我国农村贫困人口每一年都大量减少, 故选项 D 错误.

故选: ABC.

10. ABD 【详解】

$$f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right),$$

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3}, 0 \right] \text{ 时, } t = 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \right], \text{ 此时 } y = \sin t \text{ 递增, A 正确;}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \left(2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) = 2, \text{ B 正确;}$$

将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位后得解析式

$$y = 2 \sin \left[2 \left(x + \frac{5\pi}{12} \right) + \frac{\pi}{6} \right] = 2 \sin(2x + \pi) = -2 \sin 2x \neq 2 \sin 2x, \text{ C 错误;}$$

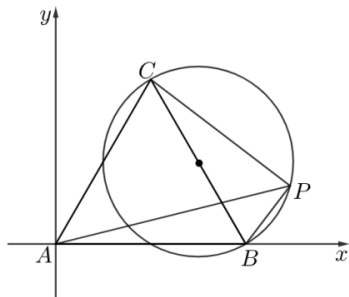
易知函数周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 因此当 $x_1 - x_2 = \pi$, 则 $f(x_1) = f(x_2)$, D 正确.

故选: ABD.

11. BCD 【详解】

因为 $\vec{a}, \vec{b}$ 是平面上夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的两个单位向量，所以设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，建立如图所示直角

坐标系：



$\overrightarrow{AP} = \vec{c}, \vec{a} - \vec{c} = \overrightarrow{PB}, \vec{b} - \vec{c} = \overrightarrow{PC}$ ，由 $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$ ，即 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$ ，

所以点 P 在以 BC 为直径的圆上，

所以 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$ ，故 A 错误；

$|\vec{a} - \vec{b}| = |\overrightarrow{BC}| = 1$ ，故 B 正确；

由图可知， $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角为锐角，所以 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 不可能垂直，故 C 正确；

$|\overrightarrow{AP}|$ 的最大值为： $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{3}$ ，故 D 正确，

故选：BCD

12. BD 【详解】

连接 AC ，显然 $AC \parallel A_1C_1$ ，而直线 DE 与平面 $ABCD$ 相交于点 D ，且 D 不在直线 AC 上，

$\therefore$ 直线 AC 与直线 DE 异面，则直线 A_1C_1 与直线 DE 异面，选项 A 错误；

在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，显然 $D_1F \parallel BE$ ，选项 B 正确；

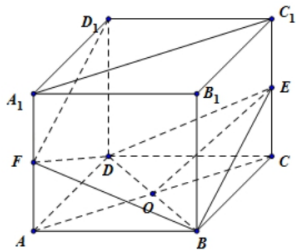
显然平面 EBD 不垂直平面 FBD ，即二面角 $E - BD - F$ 的大小不为 $\frac{\pi}{2}$ ，选项 C 错误；

直线 A_1C_1 与平面 EDB 所成角即为直线 AC 与平面 EDB 所成角，设为 α ，

设正方体边长为 2，则 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2, CE = 1, OE = \sqrt{3}, S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ，

设点 C 到平面 BDE 的距离为 d ，则 $\frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot CE = \frac{1}{3} S_{\triangle BDE} \cdot d$ ，即 $2 = \sqrt{6}d$ ，解得 $d = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

故选: BD.



13. -1. 【详解】

故答案为: -1 .

14. $5\sqrt{3}$ 【详解】

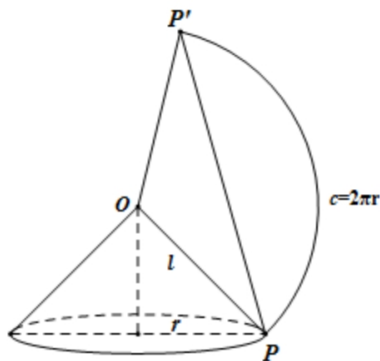
在 $\triangle ABC$ 中, 记 $a = BC = 5\sqrt{3}$, $b = AC$, $c = AB = 15$, 又 $B = 30^\circ$,

解得 $b = 5\sqrt{3}$, 即 $AC = 5\sqrt{3}$.

故答案为: $5\sqrt{3}$.

15. 1 【详解】

由题意，沿圆锥的一条母线将圆锥剪开，其侧面如图所示，设小虫爬行的最短路程为 PP' ，



在 $\triangle POP'$ 中, $OP = OP' = 3$, $PP' = 3\sqrt{3}$,

由余弦定理可得 $\cos \angle POP' = \frac{OP^2 + OP'^2 - PP'^2}{2OP \cdot OP'} = -\frac{1}{2}$,

$\therefore \angle POP' \in (0, \pi)$, 故 $\angle POP' = \frac{2\pi}{3}$,

设圆锥底面圆半径为 r cm, 则 $2\pi r = \frac{2\pi}{3} \times 3$, 解得 $r = 1$.

故答案为: 1.

16. $\frac{2}{3}$ 【详解】

由题意知: $G\left(\frac{\cos \alpha + \cos \beta + \frac{4\sqrt{3}}{3}}{3}, \frac{\sin \alpha + \sin \beta + 2\sqrt{2}}{3}\right)$,

$$\therefore \begin{cases} \frac{\cos \alpha + \cos \beta + \frac{4\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \\ \frac{\sin \alpha + \sin \beta + 2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \cos \alpha + \cos \beta = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \\ \sin \alpha + \sin \beta = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\therefore (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = \frac{4}{3},$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = 2,$$

$$\text{将两式相加, 得: } 2 + 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \frac{10}{3},$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{2}{3}.$$

故答案为: $\frac{2}{3}$.

$$17. (1) m = \frac{5}{9}, n = -\frac{8}{9}; (2) k = -\frac{16}{13}.$$

【详解】

解: (1) 因为 $\vec{a} = (3, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, $\vec{c} = (4, 1)$, 且 $\vec{a} = m\vec{b} - n\vec{c}$

$$(3, 2) = \vec{a} = m\vec{b} - n\vec{c} = m(-1, 2) - n(4, 1) = (-m - 4n, 2m - n).$$

$$\therefore \begin{cases} -m - 4n = 3 \\ 2m - n = 2 \end{cases}, \text{ 解得 } m = \frac{5}{9}, n = -\frac{8}{9}.$$

$$(2) \vec{a} + k\vec{c} = (3, 2) + k(4, 1) = (3+4k, 2+k).$$

$$2\vec{b} - \vec{a} = 2(-1, 2) - (3, 2) = (-5, 2).$$

$$\therefore -5(2+k) - 2(3+4k) = 0, \text{ 解得 } k = -\frac{16}{13}.$$

$$18. (1) \left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6} \right] (k \in \mathbb{Z}); (2) \left[1, \frac{5}{2} \right]$$

【详解】

$$\text{解: } y = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + 1 = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{3}{2} = \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{3}{2};$$

$$(1) \text{ 令 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}), \text{ 得 } k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{所以函数 } y = f(x) \text{ 的单调递增区间为 } \left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6} \right] (k \in \mathbb{Z});$$

$$(2) \text{ 由 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ 得 } \frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6},$$

$$\therefore \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \in \left[-\frac{1}{2}, 1 \right],$$

$$\text{从而函数 } y = f(x) \text{ 的值域为 } \left[1, \frac{5}{2} \right].$$

$$19. (1) \frac{\pi}{6}; (2) \frac{\pi}{4}.$$

【详解】

$$(1) \text{ 因为 } \sqrt{3}AC \cdot \sin A = BC \cdot \cos B, \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中结合正弦定理得}$$

$$\sqrt{3} \sin B \cdot \sin A = \sin A \cdot \cos B, \text{ 因为 } A \in (0, \pi), \text{ 所以 } \sin A > 0, \text{ 所以 } \sqrt{3} \sin B = \cos B,$$

$$\text{即 } \sqrt{3} \sin \left(B - \frac{\pi}{6} \right) = 0, \text{ 又因为 } B \in (0, \pi), \text{ 所以 } B = \frac{\pi}{6};$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } B = \frac{\pi}{6}, \text{ 又因为 } C = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } \angle BAC = \frac{\pi}{2}, \text{ 又因为 } AB = 100\sqrt{3}, \text{ 所以}$$

$$AC = 100, \text{ 设 } \angle BAD = \alpha, \text{ 则 } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{3} \right], \text{ 且 } \angle BDA = \frac{5\pi}{6} - \alpha, \text{ 在 } \triangle ABD \text{ 中, 由正弦}$$

定理 $\frac{AD}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{AB}{\sin \left(\frac{5\pi}{6} - \alpha \right)}$, 所以 $AD = \frac{50\sqrt{3}}{\sin \left(\frac{5\pi}{6} - \alpha \right)}$, 又因为 $\angle CAE = \frac{\pi}{3} - \alpha$, 所以

$\angle AEC = \frac{\pi}{3} + \alpha$, 在 $\triangle ACE$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AE}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{AC}{\sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)}$, 故

$AE = \frac{50\sqrt{3}}{\sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)}$, 结合三角形得面积公式得 $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AE \cdot \sin \angle DAE$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{50\sqrt{3}}{\sin \left(\frac{5\pi}{6} - \alpha \right)} \cdot \frac{50\sqrt{3}}{\sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)} \cdot \sin \angle DAE$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{50\sqrt{3}}{\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha} \cdot \frac{50\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha}$$

$$= \frac{7500}{2 \sin 2\alpha + \sqrt{3}},$$

因为 $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{3} \right]$, 所以 $2\alpha \in \left[0, \frac{2\pi}{3} \right]$, 所以当 $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, 即 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时 $2 \sin 2\alpha + \sqrt{3}$ 取得最

大值 $2 + \sqrt{3}$, 此时 $\frac{7500}{2 \sin 2\alpha + \sqrt{3}}$ 取得最小值 $7500(2 - \sqrt{3})$, 此时 $\angle BAD = \frac{\pi}{4}$.

20. (I) 证明见解析; (II) $6\sqrt{6}$.

【详解】

(I) 由鳖臑的概念, 可知 $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore DE \perp AC$,

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AC \perp BD$,

$\because BD \cap DE = D$,

$\therefore AC \perp$ 平面 BDE ,

$\because AC \subset$ 平面 ACE ,

$\therefore$ 平面 $ACE \perp$ 平面 BDE .

(II) 由已知可得点 M 为线段 AF 的三等分点,

$$V_{\text{多面体}AMEDB} = V_{ABF-DCE} - V_{B-EFM} - V_{E-BCD} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{6} \times 3 - \frac{1}{3} \times 3 \times \frac{1}{2}$$

$$\times 3 \times 2\sqrt{6} - \frac{1}{3} \times 3\sqrt{6} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 6\sqrt{6}.$$

21. (1) $\frac{6}{13}$; (2) 3 万, 2.6 万元; (3) $\frac{2}{9}, \frac{6}{25}$ 甲组的研发水平应高于乙组研发水平.

【详解】

(1) 至少有一组研发成功有 13 种情况, 甲乙都研发成功有 6 种情况, 则概率为 $P = \frac{6}{13}$.

(2) 甲组研发新药的贡献效益依次为 5, 5, 5, -1, -1, 5, 5, 5, -1, 5, -1, 5, 5, -1, 5.

则甲组贡献经济效益金的平均值 $\overline{X}_1 = \frac{50-5}{15} = \frac{45}{15} = 3$ (万元).

乙组研发新药的贡献效益依次为 5, -1, 5, 5, -1, 5, 5, -1, 5, -1, -1, 5, -1, 5, 5.

则乙组贡献经济效益金的平均值 $\overline{X}_3 = \frac{45-6}{15} = \frac{39}{15} = \frac{13}{5} = 2.6$ (万元).

(3) 甲组获得奖金额依次为 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1 (千元),

甲组获得资金的平均值 $\overline{X}_2 = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ (千元), 甲组获得资金的方差

$$S_{X_2}^2 = \frac{1}{15} \left[\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \times 10 + \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 \times 5 \right] = \frac{2}{9}.$$

乙组获得奖金额依次为 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1 (千元)

乙组获得奖金的平均值 $\overline{X}_4 = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ (千元), 乙组获得奖金的方差

$$S_{X_4}^2 = \frac{1}{15} \left[\left(1 - \frac{3}{5}\right)^2 \times 9 + \left(0 - \frac{3}{5}\right)^2 \times 6 \right] = \frac{6}{25}.$$

从而可以确定 $\overline{X}_1 > \overline{X}_3$; 但 $S_{X_2}^2 < S_{X_4}^2$,

综上所述, 从所得数据看, 甲组的研发水平应高于乙组研发水平.

22. (1) $\vec{OE} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$; (2) 证明见解析.

【详解】

解: (1) $\because B, E, C$ 三点共线,

$$\therefore \vec{OE} = x\vec{OC} + (1-x)\vec{OB} = 2x\vec{a} + (1-x)\vec{b}, \quad ①$$

$$\text{同理, } \because A, E, D \text{ 三点共线, 可得 } \vec{OE} = y\vec{a} + 3(1-y)\vec{b}, \quad ②$$

$$\text{比较①, ②, 得 } \begin{cases} 2x = y \\ 1-x = 3(1-y) \end{cases} \text{ 解得 } x = \frac{2}{5}, y = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \vec{OE} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}.$$

$$(2) \because \vec{OL} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \quad \vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OE} = \frac{4\vec{a} + 3\vec{b}}{10}, \quad \vec{ON} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD}) = \frac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{2},$$

$$\therefore \vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM} = \frac{6\vec{a} + 12\vec{b}}{10}, \quad \vec{ML} = \vec{OL} - \vec{OM} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{10},$$

$$\therefore \vec{MN} = 6\vec{ML},$$

$\therefore L, M, N$ 三点共线.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》