



高三联合考试 数学(理科)

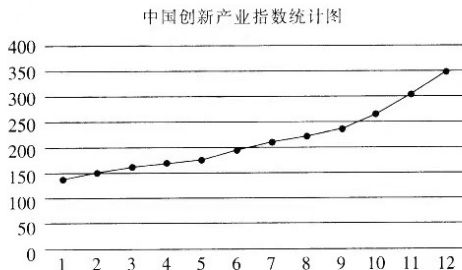
考生注意:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

第 I 卷

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 z 满足 $iz = \frac{2+i}{1-i}$, 则 z 在复平面内对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 已知集合 $A = \{y | y = x^2 + \frac{1}{x^2+1}\}$, $B = \{x | 2x-1 < 7\}$, 则 $A \cap B =$
A. $[2, 4)$ B. $(2, 4)$ C. $[1, 4)$ D. $(1, 4)$
3. 下图是 2010 年—2021 年(记 2010 年为第 1 年)中国创新产业指数统计图, 由图可知下列结论不正确的是



- A. 从 2010 年到 2021 年, 创新产业指数一直处于增长的趋势
 - B. 2021 年的创新产业指数超过了 2010 年—2012 年这 3 年的创新产业指数总和
 - C. 2021 年的创新产业指数比 2010 年的创新产业指数的两倍还要大
 - D. 2010 年到 2014 年的创新产业指数的增长速率比 2017 年到 2021 年的增长速率要慢
4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_4 = 9$, $a_1 + a_7 = 72$, 则 $\{a_n\}$ 的前 5 项和 $S_5 =$
A. 31 B. 47 C. 63 D. 81
 5. 已知 $a > 0$, 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax - 6, & x \geq 2 \\ a^x - 5a, & x < 2 \end{cases}$ 是定义域内的增函数, 则 a 的取值范围为
A. $(1, 2)$ B. $(1, 2]$ C. $(2, 3)$ D. $[2, 3)$
 6. 已知 l, m 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 下列结论正确的是
A. 若 $l \perp m, m \subset \alpha$, 则 $l \perp \alpha$ B. 若 $l // \alpha, m \subset \alpha$, 则 $l // m$
C. 若 $\alpha // \beta, l \subset \alpha, m \subset \beta$, 则 $l // m$ D. 若 $l \perp \alpha, m // \alpha$, 则 $l \perp m$

7. 已知抛物线 $C: y^2 = -12x$ 的焦点为 F , 抛物线 C 上有一动点 $P, Q(-4, 2)$, 则 $|PF| + |PQ|$ 的最小值为

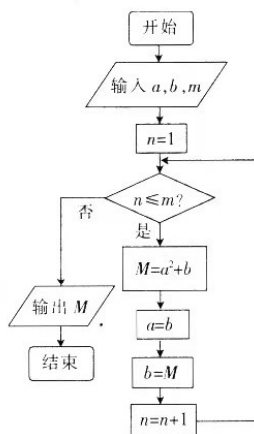
- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

8. 已知 $f(x-1)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数, $g(x) = f(2x+3)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的偶函数, 则

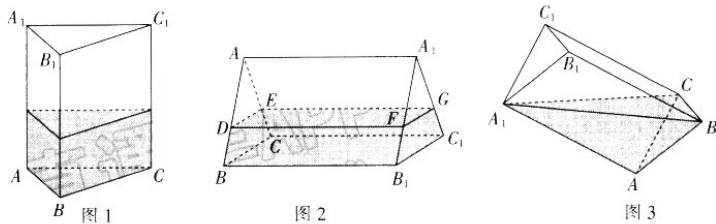
- A. $g(2) = 0$ B. $g(3) = 0$ C. $f(3) = 0$ D. $f(5) = 0$

9. 执行如图所示的程序框图, 若输入的 a, b, m 分别为 1, 2, 4, 则输出的 $M =$

- A. 7
B. 16
C. 65
D. 321



10. 在数学探究活动课中, 小华进行了如下探究: 如图 1, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 容器中注入了一定量的水, 若将侧面 BCC_1B_1 固定在地面上, 如图 2 所示, 水面恰好为 $DEGF$ (水面与 AB, AC, A_1B_1, A_1C_1 分别相交于 D, E, F, G), 若将点 A 固定在地面上, 如图 3 所示, 当容器倾斜到某一位置时, 水面恰好为 A_1BC , 则在图 2 中, $\frac{AD}{AB} =$



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

11. 已知 e 是自然对数的底数, $a = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{2}}, b = \frac{1}{5}, c = -\ln \frac{5}{6}$, 则

- A. $c < b < a$ B. $a < b < c$ C. $c < a < b$ D. $b < a < c$

12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 过点 F_1 的直线 l 与双曲线 C 的左支交于点 A , 与双曲线 C 的其中一条渐近线在第一象限交于点 B , 且 $|F_1F_2| = 2|OB|$ (O 是坐标原点), 现有下列四个结论:

- ① $|BF_1| = \sqrt{4c^2 - |BF_2|^2}$; ② 若 $\vec{AB} = 2\vec{F_1A}$, 则双曲线 C 的离心率为 $\frac{1+\sqrt{10}}{2}$; ③ $|BF_1| - |BF_2| > 2a$; ④ $c - a < |AF_1| < \sqrt{2}c - a$.

其中所有正确结论的序号为

- A. ①② B. ②③ C. ①③④ D. ①②④

第 II 卷

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 已知向量 $\mathbf{a} = (2, -3), \mathbf{b} = (4, m)$, 若 $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = |\mathbf{a} - 2\mathbf{b}|$, 则 $m =$ ▲.

14. 已知 $\omega > 0$, 函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin(2\omega x + \frac{\pi}{6}) + 2\cos^2(\omega x + \frac{\pi}{12}) - 1$ 在 $(0, \pi)$ 上恰有 3 个零点, 则 ω 的取值范围为 ▲ .
15. 由 6 位专家组成的团队前往某地进行考察后站成一排拍照留念, 已知专家甲和乙不相邻, 则不同的站法有 ▲ 种.
16. 正项等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1^2 + a_2^2 = 32$, 则 $S_9 - a_{33}$ 的最大值为 ▲ .
- 三、解答题: 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤. 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

2022 年 11 月 15 日 9 时 38 分, 长征四号丙运载火箭在酒泉卫星发射中心点火起飞, 随后将遥感三十四号 03 星送入预定轨道发射, 大量观众通过某网络直播平台观看了发射全过程. 为了解大家是否关注航空航天技术, 该平台随机抽取了 100 名用户进行调查, 相关数据如下表.

	关注	不关注	合计
男性用户	35		
女性用户		30	50
合计			100

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n=a+b+c+d.$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

- (1) 补充表格数据并根据表中数据分别估计男、女性用户关注航空航天技术的概率;
(2) 能否有 99.9% 的把握认为是否关注航空航天技术与性别有关?

18. (12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\sin A = \cos B$.

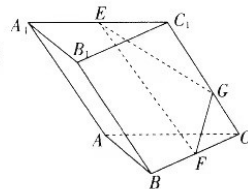
- (1) 若 $a \cos C = c$, 证明: $2\cos^3 A + \cos 2A = 2\cos A$.
(2) 若 $\cos B = \sqrt{3} \sin C, b = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (12分)

如图,三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面 ABC 是正三角形,侧面 ACC_1A_1 是菱形,平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 ABC , E, F 分别是棱 A_1C_1, BC 的中点.

(1)证明: $EF \parallel$ 平面 ABB_1A_1 .

(2)若 $AC=2, \angle ACC_1=60^\circ, \overrightarrow{C_1G}=2\overrightarrow{GC}$, 求直线 B_1C_1 与平面 EFG 所成角的正弦值.



20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的离心率相同, 点 $P(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ 为椭圆 C 上一点.

(1)求椭圆 C 的方程.

(2)若过点 $Q(\frac{1}{3}, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 试问以 AB 为直径的圆是否经过定点 M ? 若存在, 求出 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{x}{a} - e^x (a > 0)$.

(1)若 $a=1$, 证明: $f(x)$ 存在唯一的极值点.

(2)若 $\forall x \in (0, 1], f(x) \leq 0$, 求 a 的取值范围.

(二)选考题: 共 10 分. 请考生从第 22, 23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一个题目计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的方程为 $\begin{cases} x = -2 + t, \\ y = \frac{m}{4}t \end{cases} (t \text{ 为参数})$. 以坐标原点为极点, x

轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 2 \cos \theta$.

(1)求出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

(2)若 C_1 与 C_2 有公共点, 求 m 的取值范围.

23. [选修 4-5: 不等式选讲](10分)

已知函数 $f(x) = |2x - a| + |x - 3a|$.

(1)当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \leq 4$ 的解集;

(2)若对任意 $x \in \mathbf{R}, f(x) + |x - 3a| \geq a^2 + 4$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线