“四省八校”2020届高三第二次教学质量检测考试·理数

参考答案、提示及评分细则

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	C	B	C	B	B	D	A	A	A	A	D

1. 答案:D

解析:$B=\{x\mid |x|\leq 2\}=\{x\mid -2\leq x\leq 2\}$,由图可知,阴影部分是将集合 B 中属于 A 的部分去掉,所以应为 $[-1,2]$.

2. 答案:C

解析:$(1+i)(1-ai)=(1+a)+(1-a)i$,由题意,$1-a=0$,即 $a=1$.

3. 答案:B

解析:设 $P(x,y)$,则 $\overrightarrow{AP}=(x,y)$,$\overrightarrow{BP}=(x-3,y)$,由题意:$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(x-3)^2+y^2}$,

即 $(x+1)^2+y^2=4$,所以 $S=4\pi$.

4. 答案:C

解析:$(\vec{a}+\vec{b})^2=2\cos<\vec{a},\vec{b}>+2<2$,所以 $\cos<\vec{a},\vec{b}><0$,则 $<\vec{a},\vec{b}>$ 的取值范围是 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$,

所以正确选项为C.

5. 答案:B

解析:$S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=\frac{11\times 2a_6}{2}=11a_6$,$\therefore 55=11a_6$,即:$a_6=5$.

6. 答案:B

解析:$a=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}=\log_3 4>1$,$b=\log_5\frac{1}{4}<0$,$c=6^{-\frac{1}{3}}$,$0<c<1$,所以 $b<c<a$.

7. 答案:D

解析:由 $\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{4}{5}$ 可得 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)=\frac{4}{5}$,两边平方得 $\sin 2\alpha=\frac{7}{25}$.

8. 答案:A

解析:由题意可知,$xy=1$,$x>0$,$y>0$,所以 $\frac{xy}{x+y}\leq\frac{xy}{2\sqrt{xy}}=\frac{1}{2}$.

9. 答案:A

解析:由题意,$(2R)^2=3^2+4^2+5^2$,即$4R^2=50$,所以$S=4\pi R^2=50\pi$.

10. 答案:A

解析:由题意,$A_2^2A_4^4+A_3^1A_2^2A_3^3+A_3^2A_2^2A_2^2+A_2^2A_3^3=120$.

11. 答案:A

解析:$\because e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{5}{4}$,$\therefore a^2=4b^2$,则双曲线的方程为:$\frac{x^2}{4b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$

设$A(x_1,y_1)$,$M(x_0,y_0)$,则$B(-x_1,-y_1)$

$$\begin{cases}\frac{x_1^2}{4b^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_0^2}{4b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\frac{(x_1+x_0)(x_1-x_0)}{4b^2}=\frac{(y_1+y_0)(y_1-y_0)}{b^2}\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{(y_1+y_0)(y_1-y_0)}{(x_1+x_0)(x_1-x_0)}$$

即$k_1\cdot k_2=\frac{1}{4}$

$\because k_1\in[1,2]$,$\therefore k_2\in\left[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right]$.

12. 答案:D

解析:$e^{\frac{1}{x}}+\ln\frac{1}{x}-a\frac{1}{x}+a>e$,令$t=\frac{1}{x}$,$t>1$,则$e^t+\ln t-at+a>e$

令$h(t)=e^t+\ln t-at+a(t>1)$,则$h'(t)=e^t+\frac{1}{t}-a(t>1)$,$h'(t)$在$(1,+\infty)$上单增,

所以$h'(t)>h'(1)=e+1-a$,

当$a\leqslant e+1$时,$h'(t)>0$对$\forall t\in(1,+\infty)$恒成立,所以$h(t)>h(1)=e$,符合题意.

当$a>e+1$时,$h'(t)$在$(1,+\infty)$上递增可知,$\exists t_0\in(1,+\infty)$使得$h'(t_0)=0$

且$x\in(1,t_0)$时,$h'(t)<0$,$x\in(t_0,+\infty)$时,$h'(t)>0$. 所以$h(t)$在$(1,t_0)$上单减.

所以$h(t)<h(1)=e$,综上$a\leqslant e+1$.

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 答案:$\frac{1}{3^{10}}$

解析:因为$q=\frac{1}{3}$,且$a_3=a_1a_2=a_1q^2=a_1^2q$,$\therefore a_1=\frac{1}{3}$,$\therefore a_{10}=\frac{1}{3^{10}}$.

14. 答案:-220

解析:因为$(x+\frac{1}{x}-2)^6=(\frac{x^2-2x+1}{x})^6=(\frac{1}{x})^6(x-1)^{12}$,

而$(x-1)^{12}$中含x^9的系数为$C_{12}^9(-1)^3=-220$,所以x^3的系数为-220.

15. 答案:$(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$

解析:令 $=-x+y$,由题意可知,z 的最小值为 -5,所以 $-m^2+4m\leqslant -5$,

所以 $m\in(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$.

16. 答案:$\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{5}\right]\cup\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

解析:当 $0\leqslant x<1$ 时,$\{x\}=x$,又因为 $y=\{x\}$是周期为 1 的函数

由 $y=\{x\}$与 $y=-k(x-1)$图象可知:$-k\in\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right)$

所以 $k\in\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{5}\right]\cup\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解析:(1)因为$\frac{b}{\cos A\sin C}=\frac{c}{\sin C}+\frac{a}{\cos A}=\frac{c\cos A+a\sin C}{\sin C\cos A}$,所以 $b=c\cos A+a\sin C$ ……………… 2 分

由正弦定理,$\sin B=\sin C\cos A+\sin A\sin C$,且 $\sin B=\sin A\cos C+\cos A\sin C$ ……………… 4 分

所以 $\sin A\sin C=\sin A\cos C$,又因为 $0<A<\pi$,$\therefore \sin A\neq 0$

所以 $\tan C=1$,$C=\frac{\pi}{4}$. ……………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)可知,$A+B=\frac{3\pi}{4}$,而$\triangle ABC$ 是锐角三角形,

$$\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2}\\ 0<\frac{3\pi}{4}-B<\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{\pi}{4}<B<\frac{\pi}{2},$$

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}<\sin B<1$ ……………………………………………………………… 9 分

由正弦定理,$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow c=\frac{b}{\sin B}\cdot\sin C\Rightarrow c=\frac{\sqrt{2}}{2\sin B}$,所以 $c\in(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$. ……………………… 12 分

18. 解析:(1)证明:连接 AC 交 BD 于点 O,连接 OM,

由题可知:由 $V_{M-BCD}=\frac{1}{6}V_{P-ABCD}$可知:$MC=\frac{1}{3}PC$,则 $MC=\frac{1}{2}HC$,所以 $OM/\!/AH$, ……………… 4 分

且 $NH/\!/BM$,且 $AH\cap NH=H$,所以平面 $ANH/\!/$平面 MDB. ……………………………………… 6 分

(2)建立以 O 为坐标原点,$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{ON}$ 的方向为 x,y,z 轴正方向的空间直角坐标系

则 $O(0,0,0)$,$B(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0)$,$D(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},0)$,$C(-\frac{3}{2},0,0)$,$M(-1,-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{3})$

设平面 MBD 的法向量为 $\vec{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，则有 $\begin{cases}x_1-\frac{\sqrt{3}}{3}y_1-\frac{\sqrt{3}}{3}z_1=0\\ \sqrt{3}y_1=0\end{cases}$

所以 $\vec{n_1}=(1,0,\sqrt{3})$ ………………………………………………………………………… 8 分

同理：平面 CMD 的法向量 $\vec{n_2}=(1,\sqrt{3},0)$ ……………………………………………………… 10 分

所以 $\cos<\vec{n_1},\vec{n_2}>=\frac{1}{4}$，所以二面角 $B-DM-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{4}$. ……………………………… 12 分

19. 解析：(1) $y=\begin{cases}120n-960, n\in[0,16), n\in\mathbf{N}\\ 960, n\in[16,+\infty), n\in\mathbf{N}\end{cases}$. ………………………………………………… 3 分

(2)①由题意可得，X 的分布列为

X	720	840	960
P	0.1	0.2	0.7

……………………………………………………………………………………………… 5 分

$E(X)=720\times0.1+840\times0.2+960\times0.7=912$(元)；………………………………………… 6 分

$D(X)=(720-912)^2\times0.1+(840-912)^2\times0.2+(960-912)^2\times0.7=6336$ ………………… 7 分

②当加工 17 个蛋糕时，X 的分布列如下：

X	660	780	900	1020
P	0.1	0.2	0.16	0.54

……………………………………………………………………………………………… 9 分

则 $E(X)=660\times0.1+780\times0.2+900\times0.16+1020\times0.54=916.8>912$ …………………… 11 分

从数学期望来看，每天加工 17 个蛋糕的利润高于每天加工 16 个蛋糕的利润，应加工 17 个. ……
……………………………………………………………………………………………… 12 分

20. 解析：(1) 由题意可得：$\begin{cases}c=1\\ a^2=b^2+c^2\\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{2b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=1\end{cases}$,

所以椭圆的方程为：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………………………………………………………… 4 分

(2)当直线 l 的斜率不存在时，$l:x=-1$，$T(-2,0)$，$\therefore A(-1,\frac{\sqrt{2}}{2})$，$B(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$

此时$\frac{|TF|}{|AB|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ………………………………………… 6 分

当直线 l 的斜率存在时，设：$l:y=k(x+1)(k\neq 0)$，且 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

由$\begin{cases}y=k(x+1)\\x^2+2y^2-2=0\end{cases}\Rightarrow(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$，

则 $x_1+x_2=-\frac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{2k^2-2}{1+2k^2}$，$\Delta=8(k^2+1)>0$， ……………………… 8 分

所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\frac{2\sqrt{2}(k^2+1)}{1+2k^2}$ ……………………………… 9 分

由$\begin{cases}y=-\frac{1}{k}(x+1)\\x=-2\end{cases}\Rightarrow T(-2,\frac{1}{k})$，$\therefore |TF|=\sqrt{\frac{1+k^2}{k^2}}$ ……………………… 10 分

所以$\frac{|TF|}{|AB|}=\frac{1+2k^2}{2\sqrt{2}\sqrt{k^2(k^2+1)}}=\frac{(1+k^2)+k^2}{2\sqrt{2}\sqrt{k^2(k^2+1)}}>\frac{2\sqrt{(1+k^2)\cdot k^2}}{2\sqrt{2}\sqrt{k^2(k^2+1)}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

($\because 1+k^2\neq k^2$，所以无法取等号)

所以$\frac{|TF|}{|AB|}$的最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，此时 l 的方程为：$x=-1$. ……………………… 12 分

21. 解析：(1)$f'(x)=-e^x+(2-x)e^x=(1-x)e^x$，且 $f'(0)=1$，$f(0)=2$，

所以切线方程为：$y=x+2$，即 $x-y+2=0$. ……………………………… 3 分

(2)令 $F(x)=g(x)-f(x)$，依题意 $F(x)$ 有两个零点.

$F'(x)=(x-1)(e^x+2a)$ ……………………………………… 4 分

①当 $a=0$，则 $F(x)=(x-2)e^x$，$F(x)$ 只有一个零点， ………………………… 5 分

②当 $a<0$，由 $F'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=\ln(-2a)$.

若 $a\geqslant -\frac{e}{2}$，则 $\ln(-2a)\leqslant 1$，故当 $x\in(1,+\infty)$时，$F'(x)>0$，因此 $F(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.

又当 $x\leqslant 1$ 时，$F(x)<0$，所以 $F(x)$不存在两个零点.

若 $a<-\frac{e}{2}$，则 $\ln(-2a)>1$，故当 $x\in(1,\ln(-2a))$时，$F'(x)<0$；

当 $x\in(\ln(-2a),+\infty)$时，$F'(x)>0$.

因此 $F(x)$在$(1,\ln(-2a))$单调递减，在$(\ln(-2a),+\infty)$单调递增.

又当 $x\leqslant 1$ 时，$F(x)<0$，所以 $F(x)$不存在两个零点.

③当 $a>0$,则当 $x\in(-\infty,1)$ 时,$F'(x)<0$;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$F'(x)>0$,

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

又 $F(1)=-e$,$F(2)=a$,取 b 满足 $b<0$ 且 $b<\ln\frac{a}{2}$,

则 $F(b)>\frac{a}{2}(b-2)+a(b-1)^2=a(b^2-\frac{3}{2}b)>0$,

故 $F(x)$ 存在两个零点 ………………………………………… 8 分

不防设 $x_1<x_2$,由③知 $x_1\in(-\infty,1)$,$x_2\in(1,+\infty)$,$2-x_2\in(-\infty,1)$,$F(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减,所以 $x_1+x_2<2$ 等价于 $F(x_1)>F(2-x_2)$,即 $F(2-x_2)<0$.

由于 $F(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}+a(x_2-1)^2$,而 $F(x_2)=(x_2-2)e^{x_2}+a(x_2-1)^2=0$,

所以 $F(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}-(x_2-2)e^{x_2}$.

设 $h(x)=-xe^{2-x}-(x-2)e^{x}$,则 $h'(x)=(x-1)(e^{2-x}-e^{x})$.

所以当 $x>1$ 时,$h'(x)<0$,而 $h(1)=0$,故当 $x>1$ 时,$h(x)<0$.

从而 $h(x_2)=F(2-x_2)<0$,故 $x_1+x_2<2$ ………………………… 12 分

22. 解析:(1)曲线 C_1 的普通方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ ………………………… 2 分

将直线 l 的参数方程带入 C_1 的普通方程中得:$7t^2+4t-4=0$

则 $t_A+t_B=-\frac{4}{7}$,$t_A\cdot t_B=-\frac{4}{7}$,$\therefore |AB|=|t_A-t_B|=\sqrt{(t_A+t_B)^2-4t_A\cdot t_B}=\frac{8\sqrt{2}}{7}$ ………… 5 分

(2)设 $P(x,y)$ 是 C_1 上的动点,而 C_2 为 $x^2+(y-3)^2=1$,

所以 $|PC_2|=\sqrt{x^2+(y-3)^2}=\sqrt{-(y+3)^2+20}$, ………………………… 7 分

$\because -1\leqslant y\leqslant 1$,$\therefore |PC_2|$ 的最大值为 4, ………………………… 9 分

所以 $|PQ|$ 的最大值为 5. ………………………… 10 分

23. 解析:(1)由柯西不等式可知:$(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+3^2)\geqslant(x+2y+3z)^2=14$,

即:$x^2+y^2+z^2\geqslant 1$,当且仅当 $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 时等号成立,所以 $M=1$ ………………… 5 分

(2)由(1)可知:$a+b=1$,$a,b\in\mathbf{R}^+$,所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2\geqslant 4$

当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时,等号成立. ………………………… 10 分