★ 绝密 ★ 启用前

吉林市普通中学2022—2023学年度高三毕业年级第四次调研考试

数 学

本试卷共22小题，共150分，共6页，考试时间120分钟，考试结束后，将答题卡和试题卷一并交回.

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求.

1. 已知集合$A=\{x\in N^*||x|<2\}$，$B=\{x|ax-1=0\}$，若$B\subsetneqq A$，则实数$a=$

A. $\frac{1}{2}$或1　　B. 0或1　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

2. ΔABC中，$A(3,2)$，$B(1,1)$，$C(2,3)$，则AB边上的高所在的直线方程是

A. $2x+y-7=0$　　B. $2x-y-1=0$

C. $x+2y-8=0$　　D. $x-2y+4=0$

3. 已知α，β是两个不同的平面，则下列命题错误的是

A. 若$\alpha\cap\beta=l$，$A\in\alpha$且$A\in\beta$，则$A\in l$

B. 若A,B,C是平面α内不共线三点，$A\in\beta$，$B\in\beta$，则$C\notin\beta$

C. 若直线$a\subset\alpha$，直线$b\subset\beta$，则a与b为异面直线

D. 若$A\in\alpha$且$B\in\alpha$，则直线$AB\subset\alpha$

4. 下列说法错误的是

A. 若随机变量$X\sim N(2,\sigma^2)$，则$P(X\geq 2)=\frac{1}{2}$

B. 若随机变量Y服从两点分布，且$E(Y)=\frac{1}{2}$，则$D(2Y)=1$

C. 若随机变量Z的分布列为$P(Z=i)=\frac{i+2}{a}$，$i=-1,0,1,2$，则$a=10$

D. 若随机变量$T\sim B(8,\frac{1}{3})$，则T的分布列中最大的只有$P(T=3)$

5. 设$p=\frac{1}{e}$，$q=\frac{ln3}{3}$，$r=\frac{6-ln27}{e^2}$，则

A. $p>q>r$　　B. $p>r>q$

C. $r>p>q$　　D. $r>q>p$

6. 点G是ΔABC的重心，$GB\perp GC$，$BC=4$，则$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}=$

A. 32　　B. 30　　C. 16　　D. 14

7. 在我国古代，杨辉三角（如图 1）是解决很多数学问题的有力工具，从图 1 中可以归纳出等式：$C_1^1+C_2^1+C_3^1+\cdots+C_n^1=C_{n+1}^2$，类比上述结论，借助杨辉三角解决下述问题：如图 2，该“刍童垛”共 2021 层，底层如图 3，一边 2023 个圆球，另一边 2022 个圆球，向上逐层每边减少 1 个圆球，顶层堆 6 个圆球，则此“刍童垛”中圆球的总数为

第 0 行 1
第 1 行 1 1
第 2 行 1 2 1
第 3 行 1 3 3 1
第 4 行 1 4 6 4 1
第 5 行 1 5 10 10 5 1
⋮
第 n 行 1 C_n^1 C_n^2 … C_n^{r-1} … C_n^{n-2} C_n^{n-1} 1

图 1 杨辉三角

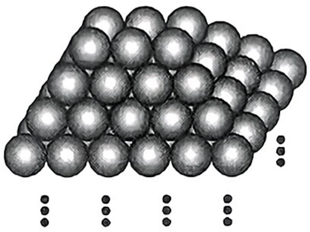


图 2 刍童垛

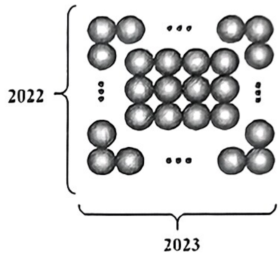


图 3 刍童垛底层

A. $2C_{2023}^3-2$　　B. $2C_{2024}^3-2$　　C. C_{2024}^4-2　　D. C_{2023}^4-2

8. 已知点 F 是抛物线 $M: y^2=2px(p>0)$ 的焦点，过点 F 作两条互相垂直的直线分别与抛物线交于点 A,B 和 C,D，且 $2|AF||BF|=|AB|$，则四边形 $ACBD$ 面积的最小值为

A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 32

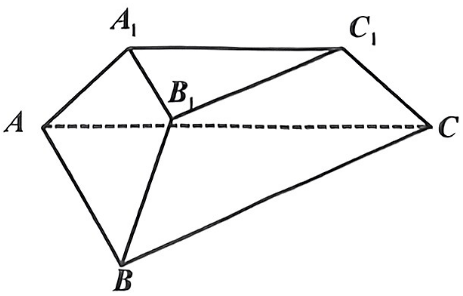
二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 已知实数 a,b,c,d 满足 $0<a<b$，$c<d<0$，则下列不等式一定成立的是

A. $\dfrac{c}{a}<\dfrac{c}{b}$　　B. $a^c<b^c$

C. $\dfrac{a-c}{b-c}>\dfrac{a-d}{b-d}$　　D. $\dfrac{c}{a-d}>\dfrac{c}{b-c}$

10. 如图所示，正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=6$，$A_1B_1=3$，AA_1 与平面 ABC 所成的角为 $\dfrac{\pi}{6}$，则



A. 该三棱台的体积是 $\dfrac{21\sqrt{3}}{4}$

B. 该三棱台的体积是 $\dfrac{21\sqrt{21}}{8}$

C. 该三棱台外接球的表面积是 28π

D. 该三棱台外接球的表面积是 112π

11. 人均消费支出是社会需求的主体，是拉动经济增长的直接因素，是体现居民生活水平和质量的重要指标．2022年一季度和2023年一季度我国居民人均消费支出分别为6393元和6738元，图1、图2分别为2022年一季度和2023年一季度居民人均消费支出构成分布图，则

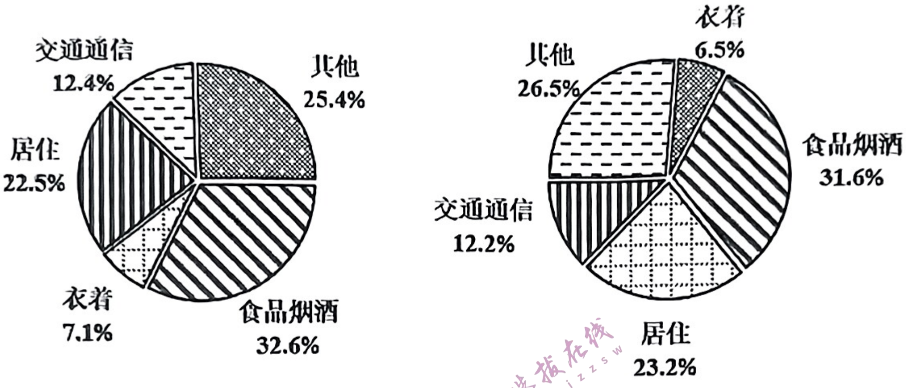


图1　　　　图2

A. 2022年一季度和2023年一季度居民食品烟酒人均消费支出均超过人均总消费支出的30%

B. 2023年一季度居民食品烟酒、衣着、居住各项人均消费支出占比较上年同期均有所降低

C. 2023年一季度居民人均交通通信支出低于上年同期人均交通通信支出

D. 2023年一季度居民人均消费支出比上年同期增长约5.4%

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2\sin(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{6})-b, -4\le x\le 0,\\ x(\ln x-a), x>0,\end{cases}$ 其中 $a,b\in R$，给出下列四个结论：

甲：$f(x)=1$ 有两个不等实根

乙：$f(x)$ 有一个极小值是 -1

丙：$f(x)$ 的所有零点的积为0

丁：$f(x)$ 的所有零点的和为 $e-\frac{8}{3}$

若上述结论有且只有一个是错误的，则上述结论正确的是

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

第 II 卷（共 90 分）

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．其中第 16 题的第一个空填对得 2 分，第二个空填对得 3 分．

13．已知复数 $z=a+bi$ $(a,b\in R)$ 是关于 x 的方程 $x^2+2x+3=0$ 的一个根，则 $|z|=$_________．

14. 已知$\omega>0$，$\vec{a}=(\sqrt{3}\sin\omega x,-\cos\omega x)$，$\vec{b}=(\cos\omega x,\cos\omega x)$，$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$，$x_1,x_2$是函数$y=f(x)-\dfrac{1}{2}$的两个零点，且$|x_1-x_2|_{min}=\pi$，则$\omega=$_________.

15. 已知椭圆C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的左焦点为$F(-c,0)$，上顶点为$B$，直线$l$过$F$和$B$，且与圆$O$：$x^2+y^2=r^2(r>c)$交于$M,N$两点，若$|MN|=\sqrt{3}r$，$|FN|=\dfrac{\sqrt{3}r}{3}$，则椭圆$C$的离心率为_________.

16. 在三棱锥$P-ABC$中，$AB=8$，$BC=4$，$AB\perp BC$，直线PA与平面ABC所成角为60°，直线PB与平面ABC所成角为30°，则点P在ΔABC所在平面内的射影的轨迹长为_________；三棱锥$P-ABC$体积的取值范围是_________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17.（本小题满分 10 分）

ΔABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$\sin(A+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{c+a}{2b}$.

（I）求角B；

（II）若ΔABC的外接圆半径为$\sqrt{3}$，求ΔABC的周长的最大值.

18.（本小题满分 12 分）

随着消费者对环保、低碳和健康生活的追求不断加强，新能源汽车的市场需求也在不断增加．新能源汽车主要有混合动力汽车、纯电动汽车、燃料电池汽车等类型．某汽车企业生产的A型汽车，有混合动力和纯电动两种类型，总日产量达120台，其中有30台混合动力汽车，90台纯电动汽车.

（I）若从中随机抽检2台汽车，用X表示抽检混合动力汽车的台数，分别就有放回抽检与不放回抽检，求X的分布列及数学期望；

（Ⅱ）若从每日生产的120台A型汽车中随机地抽取10台样本，用Y表示样本中混合动力汽车台数，分别就有放回抽取和不放回抽取，用样本中的混合动力汽车台数的比例估计总体中混合动力汽车台数的比例，求误差不超过0.15的概率，并比较在相同的误差限制下，采用哪种抽取估计的结果更可靠.

参考数据：（概率值精确到0.00001）

k	二项分布概率值	超几何分布概率值
0	0.05631	0.04929
1	0.18771	0.18254
2	0.28157	0.29051
3	0.25028	0.26134
4	0.14600	0.14701
5	0.05840	0.05396
6	0.01622	0.01307
7	0.00309	0.00206
8	0.00039	0.00020
9	0.00003	0.00001
10	0.00000	0.00000
总计	1.00000	1.00000

19.（本小题满分12分）

如图1，在等腰梯形$ABCD$中，$AB // CD$，$AB = AD = 1$，$CD = 2$，$DE = EC$.

沿AE将ΔADE折成ΔAPE，如图2所示，连接PB，PC，得到四棱锥$P-ABCE$.

（Ⅰ）若平面$PAE \cap$平面$PBC = l$，求证：$l // BC$；

（Ⅱ）若点T是PC的中点，求点T到直线EB的距离的取值范围.

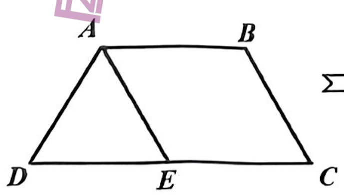


图1

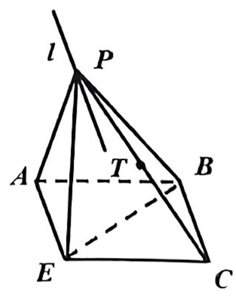


图2

20.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=0$，且$S_{n+1}=2S_n+2\,(n\in N^*)$．

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设数列$\{b_n\}$满足$b_n=(log_2 a_{n+1})^2$，求$\{a_{n+1}b_n\}$的前n项和T_n．

21.（本小题满分 12 分）

已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的左、右顶点分别为$A(-1,0)$，$B(1,0)$，动直线$l$过点$M(2,0)$，当直线$l$与双曲线$C$有且仅有一个公共点时，点$B$到直线$l$的距离为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

（Ⅰ）求双曲线C的标准方程；

（Ⅱ）当直线l与双曲线C交于异于A,B的两点P,Q时，记直线AP的斜率为k_1，直线BQ的斜率为k_2．

（ⅰ）是否存在实数λ，使得$k_2=\lambda k_1$成立，若存在，求出λ的值；若不存在，请说明理由；

（ⅱ）求直线AP和BQ交点E的轨迹方程.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=x\ln x-m(x-1)$，且$f(x)\geq 0$．

（Ⅰ）求实数m的取值范围；

（Ⅱ）设k为整数，且对任意正整数n，不等式$(1+\dfrac{1}{3})(1+\dfrac{1}{3^2})\cdots\cdots(1+\dfrac{1}{3^n})<k$恒成立，求$k$的最小值；

（Ⅲ）证明：$(\dfrac{2023}{2024})^{2024}<\dfrac{1}{e}<(\dfrac{2023}{2024})^{2023}$．

命题、校对：数学学科中心组