

吉林市普通中学 2022—2023 学年度高中毕业年级第二次调研考试

数学试题参考答案

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1	2	3	4	5	6	7	8
D	C	A	D	D	D	B	C

二、多项选择题：本大题共 4 小题，共 20 分。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9	10	11	12
AD	BD	ACD	ABC

三、填空题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$ 14. $\sqrt{7}$ 15. 2697; $a-1$ 16. (0,2)

四、解答题：

解析： $f'(x) = x - \frac{8}{x^2} = \frac{x^3 - 8}{x^2}$ 。

令 $f'(x) > 0$ ，则 $x > 2$ ；令 $f'(x) < 0$ ，则 $x < 2$ 且 $x \neq 0$ 。

∴ $f(x)$ 的增区间为： $(2, +\infty)$ ，减区间为： $(-\infty, 0)$ ， $(0, 2)$ 。

对于 A 选项：∵ $f(2) = 6$ 且 $g(x)$ 有一个零点，∴ $a > 6$ ，即 A 选项正确；

对于 B 选项：当 $x > 0$ 时， $f(x) - f(-x) = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}\right) - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{8}{-x}\right) = \frac{16}{x} > 0$ ，

∴ $f(x) > f(-x)$ 。

∵ $f(x_1) = f(x_2)$ ，∴ $f(x_1) = f(x_2) > f(-x_1)$ 。

∵ $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，∴ $x_1 < -x_1$ ，即 $x_1 + x_2 < 0$ ，即 B 选项错误。



对于 C 选项：令 $g(x) = f(2+x) - f(2-x)$, $x \in (0, 2)$.

$$g'(x) = f'(2+x) + f'(2-x) = \frac{4x^2(x^2-12)}{(4-x^2)^2} < 0,$$

$\therefore g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上递减, 即 $g(x) < g(0) = 0$.

$\therefore 0 < x_2 < 2$, $\therefore g(2-x_2) = f(4-x_2) - f(x_2) < 0$, $\therefore f(4-x_2) < f(x_2)$.

$\therefore f(x_2) = f(x_1)$, $\therefore f(4-x_2) < f(x_1)$.

又 $\because f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore 4-x_2 < x_1$, 即 $x_2 + x_1 > 4$, C 选项正确.

对于 D 选项: $\because f(x_1) = f(x_2)$, $\therefore \frac{x_1^2}{2} + \frac{8}{x_1} = \frac{x_2^2}{2} + \frac{8}{x_2}$.

$$\text{即 } (x_1 - x_2) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{8}{x_1 x_2} \right) = 0,$$

$$\because x_1 \neq x_2, \therefore x_1 + x_2 = \frac{16}{x_1 x_2}.$$

$$\therefore (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \left(\frac{16}{x_1 x_2} \right)^2 + 4(-x_1 x_2)$$

$$\text{令 } t = -x_1 x_2, t > 0, \text{ 则 } (x_2 - x_1)^2 = \left(\frac{16}{t} \right)^2 + 4t = \left(\frac{16}{t} \right)^2 + 2t + 2t \geq 3\sqrt[3]{2^{10}} = 24\sqrt{2}.$$

故 D 选项正确.

[另解: 由 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 可得 $x_1 + x_2 = \frac{16}{x_1 x_2} < 0$, 故 B 错; $x_2 + x_3 = \frac{16}{x_2 x_3}$, 由基本

不等式可得 C 对.]

【点评】

(1) 由斐波那契数 F_n 除以 4 的余数按原顺序构成的数列 $\{a_n\}$, 是以 6 为最小正周期的数列.

$$\text{所以 } a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2017} = 8 + 337 \times 4 = 2697$$

(2) 由斐波那契数 F_n 的递推关系可知: $n > 2$ 时 $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, 且 $F_1 = F_2 = 1$, $F_{2024} = a$

所以 $F_1 + F_2 + \cdots + F_{2022} = (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + \cdots + (F_{2024} - F_{2023}) = F_{2024} - F_2 = a - 1$.

(也可直接由性质 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_{n+2} - 1$ 得出结论)

15. 题说明:

本题源自人教 A 版选择性必修第二册 P10~P11 页阅读与思考部分内容.

斐波那契数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \in \mathbb{N}^+, n \geq 2)$,

该数列通项公式为: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ (用无理数表示有理数的典型代表)

常考性质: (1) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$, 即 $\sum_{k=1}^n a_k^2 = a_n a_{n+1}$,

(2) $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} = a_{2n}$, 即 $\sum_{k=1}^n a_{2k-1} = a_{2n}$,

(3) $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$, 即 $\sum_{k=1}^n a_{2k} = a_{2n+1} - 1$,

(4) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_{n+2} - 1$, 即 $\sum_{k=1}^n a_k = a_{n+2} - 1$.

(5) a_{4k} 为 3 的倍数.

四、解答题

17. 【解析】

(1) 设在男生、女生中分别抽取 m 名和 n 名, 则 $\frac{m}{900} = \frac{n}{1500-900} = \frac{100}{1500}$,

解得: $m = 60, n = 40$ 2 分

记抽取的总样本的平均数为 $\bar{w}$, 根据按比例分配分层随机抽样总样本平均数与各层样本平均数的关

$$\text{系, 可得: } \bar{w} = \frac{60}{100} \times 13.2 + \frac{40}{100} \times 15.2 = 14(\text{cm})$$

所以, 抽取的总样本的平均数为 14cm 5 分

(II) 男生样本的平均数为 $\bar{x} = 13.2$, 样本方差为 $s_1^2 = 13.36$; 女生样本的平均数为 $\bar{y} = 15.2$,

样本方差为 $s_2^2 = 17.56$; 由(I)知, 总样本的平均数为 $\bar{w} = 14$.

记总样本的样本方差为 s^2 ,

$$\text{则 } s^2 = \frac{1}{100} \{60 \times [13.36 + (13.2 - 14)^2] + 40 \times [17.56 + (15.2 - 14)^2]\} = 16 \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

所以, 估计高一年级全体学生的坐位体前屈成绩的方差为 16 10 分

(注: 本次考试给出了分层随机抽样的方差公式, 但是此公式需要记忆, 请老师在教学中强调并指导学生完成公式的推导.)

18. 【解析】

(I) (法一) 利用余弦定理

因为 $b \cos C + c \cos B = 6$, 由余弦定理, 得

$$b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = a = 6 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(法二) 利用正弦定理

因为 $b \cos C + c \cos B = 6$, 由正弦定理, 得

$$2R(\sin B \cos C + \sin C \cos B) = 6 \quad \therefore 2R \sin(B + C) = 6$$

$$\therefore 2R \sin A = 6 \text{ 即 } a = 6 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 选择(1):

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{6}{\sin \frac{\pi}{4}} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{所以 } b = 6\sqrt{2} \sin B, \quad c = 6\sqrt{2} \sin C. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = 18\sqrt{2} \sin B \sin C = 18\sqrt{2} \sin B \sin \left(B + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 18\sqrt{2}\sin B \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos B + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin B \right) = 18\sin B\cos B + 18\sin^2 B = 9\sin 2B + 9 - 9\cos 2B$$

$$= 9\sqrt{2}\sin \left(2B - \frac{\pi}{4} \right) + 9 \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形

$$\text{所以} \begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < C < \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ 又 } C = \frac{3\pi}{4} - B, \text{ 所以} \begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{3\pi}{4} - B < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \text{ 所以 } \frac{\pi}{4} < B < \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{\pi}{4} < 2B - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}, \text{ 所以 } \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \left(2B - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } 9 < 9\sqrt{2}\sin \left(2B - \frac{\pi}{4} \right) \leq 9\sqrt{2},$$

$$\text{所以 } 18 < S_{\triangle ABC} \leq 9\sqrt{2} + 9 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

【注：利用余弦定理，解出 $bc \leq 9\sqrt{2} + 9$ ，仅得出 $S_{\triangle ABC}$ 的最大值，给 9 分】

选择②

因为 $b + c = 10$ ，则 $c = 10 - b$

$$\text{因为 } \triangle ABC \text{ 是锐角三角形，所以} \begin{cases} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0 \\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} > 0 \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} > 0 \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} b^2 + c^2 - a^2 = b^2 + (10 - b)^2 - 36 > 0 \\ a^2 + c^2 - b^2 = 36 + (10 - b)^2 - b^2 > 0 \\ a^2 + b^2 - c^2 = 36 + b^2 - (10 - b)^2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{所以 } \frac{16}{5} < b < \frac{34}{5} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5b - 16}{3b},$$

$$\text{所以 } \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{4\sqrt{(b-2)(8-b)}}{3b}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = 3b \cdot \frac{4\sqrt{(b-2)(8-b)}}{3b}$$

$$= 4\sqrt{-b^2 + 10b - 16}, \left(\frac{16}{5} < b < \frac{34}{5}\right) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

由二次函数 $y = -x^2 + 10x - 16$ 的性质可得, 当 $x = 5$ 时, 函数取最大值 9; 当 $x = \frac{16}{5}$ 时, $y = \frac{144}{25}$.

$$\text{所以 } \frac{48}{5} < S_{\triangle ABC} \leq 12 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

法二:

$\triangle ABC$ 中, $|AC| + |AB| = 10 > |BC| = 6$, 所以点 A 的轨迹为以 B, C 为焦点, 10 为长轴长的椭圆的一部分, 以 BC 中点为坐标原点, BC 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系,

可得 A 点所在的椭圆为: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, 如图 $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

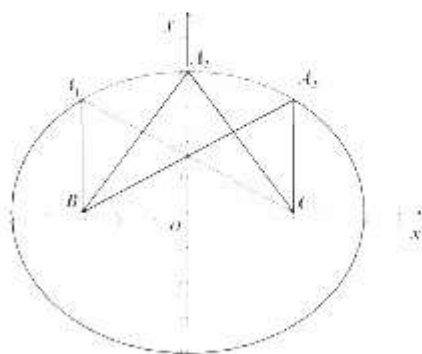
不妨设 A 在 x 轴上方, 坐标为 $A(x_0, y_0)$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2 - 2bc - 36}{2bc}$$

$$= \frac{64 - 2bc}{2bc} = \frac{32}{bc} - 1$$

$$\geq \frac{32}{(b+c)^2} - 1 = \frac{32}{25} - 1 = -\frac{7}{25} > 0,$$



当且仅当 $b=c$ 时, 即 A 点在短轴端点 A_2 时, 取得最小值, 此时角 A 最大是锐角, 此时 $y_0=4$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot y_0 = 12 \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

当 AB 与 x 轴垂直时, 即 A 点在图中 A_1 时, 角 B 为直角, 此时 $y_0 = \frac{16}{5}$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot y_0 = \frac{48}{5}$

当 AC 与 x 轴垂直时, 即 A 点在图中 A_3 时, 角 C 为直角, 此时 $y_0 = \frac{16}{5}$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot y_0 = \frac{48}{5}$
.....10 分

综上, A 位于除去端点的弧 A_1A_3 上时, 满足 $\triangle ABC$ 是锐角三角形.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot y_0, \left(\frac{16}{5} < y_0 \leq 4 \right) \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{48}{5} < S_{\triangle ABC} \leq 12$$

同理可得 A 在 x 轴下方时, $\frac{48}{5} < S_{\triangle ABC} \leq 12$,

$$\text{综上, } \frac{48}{5} < S_{\triangle ABC} \leq 12 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 【解析】 (1) (几何法)

(I) 因为四边形 $ABCD$ 为菱形, 所以 $AC \perp BD$,

因为 $EA=EC$, 且 O 为 AC 中点, 所以 $AC \perp OE$,2 分

$BD \cap OE = O$, $BD, OE \subset$ 平面 $BDEF$

所以 $AC \perp$ 平面 $BDEF$ 5 分

(II) 因为四边形 $BDEF$ 为矩形, 连接 OE , $BD=2, BF=1$, 且 O 为 BD 中点, 所以

$EO=BO=\sqrt{2}, EF=1, EO^2+FO^2=EF^2$, 所以 $EO \perp FO$.



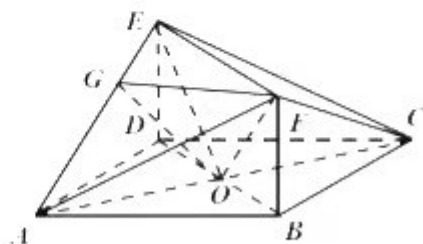
由(1)可知 $FO \perp AC$, $EO \cap AC = O$, 所以 $FO \perp$ 平面 AEC

又 $EA \subset$ 平面 AEC , 所以 $FO \perp EA$.

过 O 作 $OG \perp AE$, 连接 GF , 又 $OG \cap OF = O$, 所以 $EA \perp$ 平面 OFG

$GF \subset$ 平面 OFG , 所以 $EA \perp GF$,

则 $\angle OGF$ 为二面角 $F-AE-C$ 的平面角.....8 分



在 $Rt\triangle EOA$ 中, $OG \cdot EA = OE \cdot OA$, $OG = \frac{OE \cdot OA}{EA} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$

在 $Rt\triangle FOG$ 中, $FG = \sqrt{OG^2 + OF^2} = \sqrt{\frac{6}{5} + 2} = \frac{4}{\sqrt{5}}$10 分

则 $\cos \angle OGF = \frac{OG}{FG} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

所以二面角 $F-AE-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$12 分

法二(向量法)(1)问同上

(II)由(1)可知: $AC \perp$ 平面 $BDEF$, $ED \subset$ 平面 $BDEF$, 所以 $AC \perp ED$.

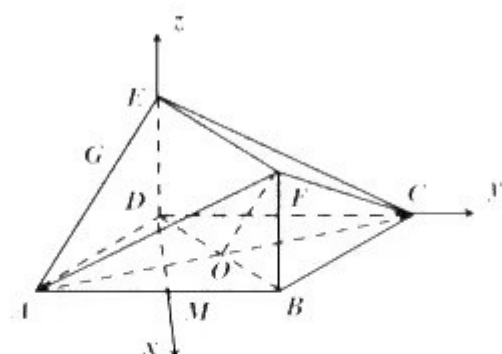
因为四边形 $BDEF$ 为矩形, 所以 $ED \perp BD$, 且 $BD \cap AC = O$,

所以 $ED \perp$ 平面 $ABCD$

因为 $\angle DAB = 60^\circ$, 取 AB 中点 M , 连 DM , 则 $DM \perp CD$.

以 D 为坐标原点, DM, DC, DE 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系

.....6 分



$$D(0,0,0), A(\sqrt{3},-1,0), E(0,0,1), C(0,2,0), F(\sqrt{3},1,1)$$

$$\vec{AE} = (-\sqrt{3},1,1), \vec{AF} = (0,2,1), \vec{AC} = (-\sqrt{3},3,0)$$

设平面 AEF 的一个法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{AE} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{AF} = 0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} -\sqrt{3}x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \text{取 } y = -3, \text{ 则 } z = 6, x = \sqrt{3}$$

$$\text{得 } \vec{n}_1 = (\sqrt{3}, -3, 6) \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设平面 AEF 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{AE} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} -\sqrt{3}x + y + z = 0 \\ -\sqrt{3}x + 3y = 0 \end{cases} \text{取 } x = \sqrt{3}, \text{ 则 } y = 1, z = 2$$

$$\text{得 } \vec{n}_2 = (\sqrt{3}, 1, 2) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

设二面角 $F-AE-C$ 为 θ ，由图可知二面角为锐角

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{12}{\sqrt{3+9+36} \cdot \sqrt{3+1+4}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{所以二面角 } F-AE-C \text{ 的余弦值为 } \frac{\sqrt{6}}{4} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

证

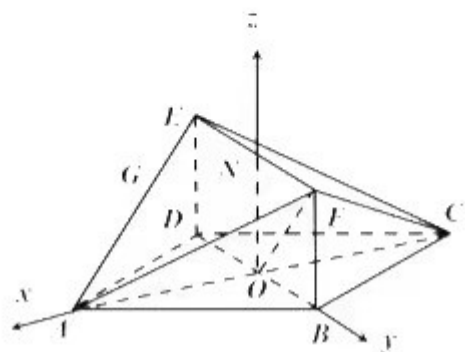
由(1)可知: $AC \perp$ 平面 $BDEF$, $ED \subset$ 平面 $BDEF$, 所以 $AC \perp ED$.

因为四边形 $BDEF$ 为矩形, 所以 $ED \perp BD$, 且 $BD \cap AC = O$,

所以 $ED \perp$ 平面 $ABCD$

取 EF 中点 N , 以 O 为坐标原点, OA, OB, ON 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角

坐标系, 如图所示.6 分



$$O(0,0,0), A(\sqrt{3},0,0), E(0,-1,1), C(-\sqrt{3},0,0), F(0,1,1)$$

$$\overrightarrow{AE} = (-\sqrt{3}, -1, 1), \overrightarrow{AF} = (-\sqrt{3}, 1, 1), \overrightarrow{AC} = (-2\sqrt{3}, 0, 0)$$

设平面 AEF 的一个法向量 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AF} = 0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} -\sqrt{3}x - y + z = 0 \\ -\sqrt{3}x + y + z = 0 \end{cases} \text{取 } x = \sqrt{3}, \text{ 则 } z = 3, y = 0$$

$$\text{得 } \vec{n}_1 = (\sqrt{3}, 0, 3) \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设平面 AEC 法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} -\sqrt{3}x - y + z = 0 \\ -2\sqrt{3}x = 0 \end{cases} \text{取 } z = 1, \text{ 则 } y = 1, x = 0$$

$$\text{得 } \vec{n}_2 = (0, 1, 1) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

设二面角 $F-AE-C$ 为 θ , 由图可知二面角为锐角



$$\text{则 } |\cos \theta| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{3+9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

所以二面角 $F-AE-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$ 12 分

20. 【解析】

$$(1) \because a_1 = 3, S_1 = 3$$

又 $\because$ 数列 $\left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$ 为以 2 为公差的等差数列

$$\therefore \frac{S_n}{n} = 2n + 1 \text{ 即 } S_n = 2n^2 + n \text{ 3 分}$$

$$\because n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 + n - 2(n-1)^2 - (n-1) = 4n - 1; n = 1 \text{ 时, } a_1 = 3 \text{ 符合上式}$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 4n - 1$ 6 分

$$(II) b_n = \frac{(-1)^n (a_n + 2)}{a_n a_{n+1}} = \frac{(-1)^n (4n + 1)}{(4n - 1)(4n + 3)} = \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{1}{4n - 1} + \frac{1}{4n + 3} \right) \text{ 8 分}$$

$$\begin{aligned} T_{2n} &= \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{11} \right) - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{15} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{8n-1} + \frac{1}{8n+3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{8n+3} \right] \\ &= \frac{-4n}{24n+9} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{数列 } \{b_n\} \text{ 的前 } 2n \text{ 项和 } T_{2n} = \frac{-4n}{24n+9} \text{ 12 分}$$

$$+21 \text{ 分 } T_{2n} = \frac{1}{6} + \frac{1}{16n+6} \text{ (本处考试不用写, 但教学中应强调结果最简化)}$$

21. 【解析】



解: (I) 由已知可得: $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2$, 整理化简可得: $3x^2 - y^2 = 3$, 即 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

所以动点 M 的轨迹方程为: $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 4 分

(II) 方案 1:

由 $OP \perp OQ$ 可设直线 OP 的方程为 $y = kx$, 直线 OQ 的方程为 $y = -\frac{1}{k}x$ 5 分

由 $\begin{cases} y=kx \\ 3x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x^2 = \frac{3}{3-k^2} \\ y^2 = \frac{3k^2}{3-k^2} \end{cases}$, 所以 $|OP|^2 = x^2 + y^2 = \frac{3(1+k^2)}{3-k^2}$

同理可得 $|OQ|^2 = \frac{3(1+k^2)}{3k^2-1}$, 又由 $|OP|^2 > 0$ 且 $|OQ|^2 > 0$ 可得 $\frac{1}{3} < k^2 < 3$ 7 分

法 2:

所以 $\frac{1}{|OQ|^2} + \frac{1}{|OP|^2} = \frac{3-k^2+3k^2}{3(1+k^2)} = \frac{1}{3}$ 8 分

所以 $|OP|^2 + |OQ|^2 = \frac{3}{2}(|OP|^2 + |OQ|^2)(\frac{1}{|OQ|^2} + \frac{1}{|OP|^2})$

所以 $|OP|^2 + |OQ|^2 = \frac{3}{2}(2 + \frac{|OP|^2}{|OQ|^2} + \frac{|OQ|^2}{|OP|^2}) = \frac{3}{2}(2 + 2\sqrt{1}) = 6$ 10 分

当且仅当 $|OP| = |OQ| = \sqrt{3}$ 时等号成立.

所以 $|OP|^2 + |OQ|^2$ 的最小值为 6 12 分

法 3:

所以 $|OP|^2 + |OQ|^2 = \frac{3(1+k^2)}{3-k^2} + \frac{3(1+k^2)}{3k^2-1} = \frac{6(1+k^2)^2}{(3-k^2)(3k^2-1)}$ 8 分

令 $t = k^2 + 1$ ($\frac{4}{3} < t < 4$),



$$\text{则 } |OP|^2 + |OQ|^2 = \frac{6t^2}{(4-t)(3t-4)} = \frac{6t^2}{3t^2 + 16t - 16} = \frac{6}{16(\frac{1}{t} - \frac{1}{2})^2} + 1 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以当 } \frac{1}{t} = \frac{1}{2} \text{ 时, 即 } k = 1 \text{ 时, } |OP|^2 + |OQ|^2 \text{ 有最小值为 } 6. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

法二:

$$\begin{aligned} |OP|^2 + |OQ|^2 &= \frac{6(1+k^2)^2}{(3-k^2)(3k^2-1)} = -\frac{6(k^4+2k^2+1)}{3k^4-10k^2+3} = -\frac{2(3k^4-10k^2+3)+32k^2}{3k^4-10k^2+3} \\ &= -2 - \frac{32}{3k^2 + \frac{3}{k^2}} \geq 10 \dots\dots\dots 8 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{设 } f(x) = x + \frac{1}{x} \left(\frac{1}{3} < x < 3 \right) \therefore f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$\text{令 } f'(x) > 0, \therefore 1 < x < 3 \quad \text{令 } f'(x) < 0, \therefore \frac{1}{3} < x < 1$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } \left(\frac{1}{3}, 1\right) \text{ 递减, 在 } (1, 3) \text{ 递增} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore f(1) \leq f(x) < f(3) = f\left(\frac{1}{3}\right) \text{ 即 } 2 \leq f(x) < \frac{10}{3} \text{ 即 } 6 \leq 3\left(k^2 + \frac{1}{k^2}\right) < 10$$

$$\text{所以 } |OP|^2 + |OQ|^2 \geq 6 \text{ 即 } |OP|^2 + |OQ|^2 \text{ 的最小值为 } 6 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

法四:

$$\text{因为 } 3-k^2 > 0, 3k^2-1 > 0$$

$$\text{所以 } |OP|^2 + |OQ|^2 = \frac{3(1+k^2)}{3-k^2} + \frac{3(1+k^2)}{3k^2-1} = \frac{6(1+k^2)^2}{(3-k^2)(3k^2-1)} = \frac{6(1+k^2)^2}{\left(\frac{3-k^2}{2} + \frac{3k^2-1}{2}\right)^2} \geq 6 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{当且仅当 } \frac{3-k^2}{2} = \frac{3k^2-1}{2} \text{ 时, 即 } k = 1 \text{ 时, } |OP|^2 + |OQ|^2 \text{ 有最小值为 } 6. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$



【答案】：

当直线 m 的斜率不存在时，设直线 m 的方程为 $x = x_0$

则 $P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0)$

$$\therefore \vec{OP} \cdot \vec{OQ} = x_0^2 - y_0^2 = x_0^2 - (3x_0^2 - 3) = 3 - 2x_0^2 = 0 \therefore x_0^2 = \frac{3}{2}, y_0^2 = \frac{3}{2}$$

$$|\vec{OP}|^2 + |\vec{OQ}|^2 = 2(x_0^2 + y_0^2) = 6 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

当直线 m 的斜率存在时，设直线 m 的方程为 $y = kx + t$

设其与动点 M 的轨迹相交于 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$

$$\text{所以} \begin{cases} 3x^2 - y^2 = 3 \\ y = kx + t \end{cases} \text{ 联立得: } (3 - k^2)x^2 - 2ktx - t^2 - 3 = 0 (3 - k^2 \neq 0) \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{其中 } 3 - k^2 \neq 0, \Delta = 4k^2t^2 - 4(3 - k^2)(t^2 + 3) = 12(t^2 - k^2 - 3) > 0 \text{ ①}$$

$$\text{由韦达定理可得: } x_1 + x_2 = \frac{2kt}{3 - k^2}, x_1x_2 = \frac{-t^2 - 3}{3 - k^2} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \vec{OP} \perp \vec{OQ} \text{ 可知: } \vec{OP} \cdot \vec{OQ} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

$$\text{所以 } \vec{OP} \cdot \vec{OQ} = x_1x_2 + (kx_1 + t)(kx_2 + t) = (1 + k^2)x_1x_2 + kt(x_1 + x_2) + t^2 = \frac{2t^2 - 3k^2 - 3}{3 - k^2} = 0$$

$$\text{所以 } 2t^2 - 3k^2 + 3 \text{ ②} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由①②可得 } |\vec{OP}|^2 + |\vec{OQ}|^2 = |\vec{PQ}|^2 = (1 + k^2)(x_1 - x_2)^2 = (1 + k^2) \frac{12(t^2 - k^2 - 3)}{(3 - k^2)^2}$$

$$\text{所以 } |\vec{OP}|^2 + |\vec{OQ}|^2 = \frac{6(k^4 + 10k^2 + 9)}{k^4 - 6k^2 + 9} = 6(1 + \frac{16k^2}{k^4 - 6k^2 + 9}) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{当 } k \neq 0 \text{ 时, } |\vec{OP}|^2 + |\vec{OQ}|^2 = 6(1 + \frac{16}{k^2 - 6 + \frac{9}{k^2}}) > 6$$

$$\text{当 } k = 0 \text{ 时, } |\vec{OP}|^2 + |\vec{OQ}|^2 = 6$$

所以 $|OP|^2 + |OQ|^2$ 的最小值为 6 12 分

22. 【解析】

解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$ ，

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = -\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 \leq 0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减 4 分

（II） $g(x) = 2\ln x - x + 1$ ，定义域是 $(0, +\infty)$ ，

$$\text{则 } g'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x},$$

令 $g'(x) > 0$ ，则 $0 < x < 2$ ；令 $g'(x) < 0$ ，则 $x > 2$ ，

$\therefore g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增，在 $(2, +\infty)$ 上单调递减 5 分

$$\because g(1) = 0, \quad g(3) = 2\ln 3 - 2 > 0, \quad g(4) = 4\ln 2 - 3 < 0,$$

$\therefore \exists x_0 \in (3, 4)$ ，使 $g(x_0) = 0$ ，即 $2\ln x_0 = x_0 - 1$ ，

当 $1 < x < x_0$ 时， $g(x) > 0$ ；当 $0 < x < 1$ 或 $x > x_0$ 时， $g(x) < 0$ 7 分

$$\therefore g(x)(x^2 + mx + n) \leq 0$$

当 $1 < x < x_0$ 时， $x^2 + mx + n < 0$ ；当 $0 < x < 1$ 或 $x > x_0$ 时， $x^2 + mx + n > 0$ ，

$\therefore 1$ 和 x_0 是方程 $x^2 + mx + n = 0$ 的两个不等实数根，

$$\therefore \Delta = m^2 - 4n > 0, \text{ 由韦达定理 } 1 + x_0 = -m, \quad 1 \times x_0 = n,$$

$$\therefore m = -1 - x_0, n = x_0, \therefore m + n = -1, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{故 } \therefore m = -1 - n$$

$$\therefore 2\ln n - \frac{1}{ne^{\frac{m+1}{2}}} + \frac{1}{n} + 1 = 2\ln n - \frac{1}{ne^{\frac{1-n}{2}}} + \frac{1}{n} + 1 = 2\ln n - \frac{e^{n-1}}{n} + \frac{1}{n} + 1$$

2019.11.15



$$\text{又由 } 2 \ln x_0 = x_0 - 1 \quad \therefore x_0^{-2} = e^{x_0-1}$$

$$\text{又 } n = x_0 \quad \therefore e^{n-1} = n^{-2}$$

$$\text{原式} = 2 \ln n - n + \frac{1}{n} + 1 = f(n) + 1 \quad (\text{其中 } n = x_0 \in (3, 4)) \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

由 (1) 知 $f(x)$ 在区间 $(3, 4)$ 上单调递减

$$\text{且 } f(3) + 1 = 2 \ln 3 - \frac{5}{3} \approx 0.53, f(4) + 1 = 4 \ln 2 - \frac{11}{4} \approx 0.05,$$

$$\therefore |f(n) + 1| = 0.$$

$$\text{即 } \left| 2 \ln n - \frac{1}{ne^{m+2}} + \frac{1}{n} + 1 \right| = 0 \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

证

$$\text{由 } m + n = 1 \quad \therefore m = 1 - n$$

$$\begin{aligned} \therefore 2 \ln n - \frac{1}{ne^{m+2}} + \frac{1}{n} + 1 &= 2 \ln n - \frac{1}{ne^{1-n}} + \frac{1}{n} + 1 \\ &= 2 \ln n - \frac{e^{n-1}}{n} + \frac{1}{n} + 1 \end{aligned}$$

$$\text{又由 } 2 \ln x_0 = x_0 - 1 \quad \therefore x_0^{-2} = e^{x_0-1}$$

$$\text{又 } n = x_0 \quad \therefore e^{n-1} = n^{-2}, \quad 2 \ln n = n - 1$$

$$\text{原式} = n - 1 - n + \frac{1}{n} + 1 = \frac{1}{n} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\because n = x_0 \in (3, 4) \quad \therefore \frac{1}{n} \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right) \quad \therefore \left[\frac{1}{n} \right] = 0$$

$$\text{即 } \left| 2 \ln n - \frac{1}{ne^{m+2}} + \frac{1}{n} + 1 \right| = 0 \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线