

保密★启用前

2021~2022 学年度第二学期质量检测

高二数学

2022.7

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. $7 \times 8 \times 9 \times \cdots \times 15$ 可表示为

A. A_{15}^9 B. A_{15}^8 C. C_{15}^9 D. C_{15}^8

2. 从 1~7 这七个数字中选 3 个数字, 组成无重复数字的三位数, 其中偶数的个数为

A. 210 B. 120 C. 90 D. 45

3. $(x-1)^9$ 的展开式的第 6 项的系数为

A. C_9^6 B. $-C_9^6$ C. C_9^5 D. $-C_9^5$

4. 日常生活中的饮用水是经过净化的, 随着水的纯净度的提高, 所需净化费用不断增加. 已知将 1 t 水净化到纯净度为 $x\%$ 时所需费用 (单位: 元) 为 $c(x) = \frac{5284}{100-x}$ ($80 < x < 100$),

则净化到纯净度为 98% 左右时净化费用的变化率, 大约是净化到纯净度为 90% 左右时净化费用变化率的

A. 30 倍 B. 25 倍 C. 20 倍 D. 15 倍

5. 根据分类变量 X 与 Y 的成对样本数据, 计算得到 $\chi^2 = 6.147$. 根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验 ($\chi_{0.01}^2 = 6.635$), 结论为

A. 变量 X 与 Y 不独立 B. 变量 X 与 Y 不独立, 这个结论犯错误的概率不超过 0.01
C. 变量 X 与 Y 独立 D. 变量 X 与 Y 独立, 这个结论犯错误的概率不超过 0.01

高二数学试题 第 1 页 (共 5 页)

6. 已知6件产品中有2件次品, 4件正品, 检验员从中随机抽取3件进行检测, 记取到的正品数为 X , 则 $E(X)=$

- A. 2 B. 1 C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

7. 某人在11次射击中击中目标的次数为 X , 若 $X \sim B(11, 0.8)$, 若 $P(X=k)$ 最大, 则 $k=$

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

8. 已知函数 $f(x)=(x+1)e^x$, 过点 $M(1, t)$ 可作3条与曲线 $y=f(x)$ 相切的直线, 则实数 t 的取值范围是

- A. $(-\frac{4}{e^2}, 0)$ B. $(-\frac{4}{e^2}, \frac{2}{e})$ C. $(-\frac{6}{e^3}, 2e)$ D. $(-\frac{6}{e^3}, 0)$

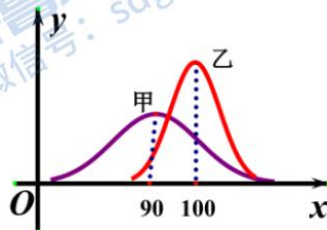
二、多项选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分.

9. 对经验回归方程, 下列正确的有

- A. 决定系数 R^2 越小, 模型的拟合效果越好
B. 经验回归方程只适用于所研究的样本的总体
C. 不能期望经验回归方程得到的预报值就是响应变量的精确值
D. 残差平方和越小, 模型的拟合效果越好

10. 甲、乙两地举行数学联考, 统计发现: 甲地学生的成绩 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ($\sigma_1 > 0$), 乙地学生的成绩 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ($\sigma_2 > 0$). 下图分别是其正态分布的密度曲线, 则

- A. 甲地数学的平均成绩比乙地的低
B. 甲地数学成绩的离散程度比乙地的小
C. $P(90 \leq X < 94) > P(82 \leq X < 90)$
D. 若 $\sigma_2 = 8$, 则 $P(92 \leq Y < 124) \approx 0.84$



(附: 若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 则 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$,
 $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$)

11. 下列命题正确的有

- A. 现有1、3、7、13四个数, 从中任取两个相加得到 m 个不相等的和; 从中任取两个相减得到 n 个不相等的差, 则 $m+n=18$
- B. 在 $(x+1)^5 + (x+1)^6 + (x+1)^7$ 的展开式中, 含 x^3 的项的系数为65
- C. 若 $(1-\sqrt{2})^5 = a - b\sqrt{2}$ (a, b 为有理数), 则 $b = -29$
- D. $C_{2022}^0 + C_{2022}^2 + C_{2022}^4 + \cdots + C_{2022}^{2020} + C_{2022}^{2022} = 2^{2020}$

12. 已知函数 $f(x) = x(\ln x - ax) + 2a$ ($a \in \mathbf{R}$) 有两个极值点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 则

- A. $0 < a < \frac{1}{4}$ B. $x_1 + x_2 > 2$ C. $f(x_1) > \frac{1}{2}$ D. $f(x_2) > 0$

三、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分.

13. 已知函数 $f(x) = x^3$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线的方程为_____.

14. 将4名博士分配到3个不同的实验室, 每名博士只分配到一个实验室, 每个实验室至少分配一名博士, 则不同的分配方案有_____种.

15. 某小微企业制造并出售球形瓶装的某种饮料, 瓶子的制造成本是 $1.6\pi r^2$ 分, 其中 r (单位: cm) 是瓶子的半径, 已知每出售1 mL 的饮料, 可获利0.4分, 且能制作的瓶子的最大半径为6 cm, 当每瓶饮料的利润最大时, 瓶子的半径为_____ cm.

16. 已知离散型随机变量 X 的取值为有限个, $E(X) = \frac{7}{2}$, $D(X) = \frac{35}{12}$, 则 $E(X^2) =$ _____.

四、解答题: 本题共6小题, 共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分10分)

两批同种规格的产品, 第一批占40%, 次品率为5%; 第二批占60%, 次品率为4%. 将两批产品混合, 从混合产品中任取一件.

(I) 求这件产品是次品的概率;

(II) 已知取到的是次品, 求它取自第一批产品的概率.

18. (本小题满分 12 分)

若 $(x - \frac{a}{x})^n$ ($a \in \mathbf{R}, a \neq 0, n \in \mathbf{N}^*$) 的展开式中只有第 4 项的二项式系数最大, 且展开式中的常数项为 -20.

(I) 求 n, a 的值;

(II) 若 $a_0 x^{2022} + a_1 x^{2021}(1-x) + a_2 x^{2020}(1-x)^2 + \cdots + a_{2021} x(1-x)^{2021} + a_{2022}(1-x)^{2022} = a$,

求 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2022}$.

19. (本小题满分 12 分)

某校组织数学知识竞赛活动, 比赛共 4 道必答题, 答对一题得 4 分, 答错一题扣 2 分.

学生甲参加了这次活动, 假设每道题甲能答对的概率都是 $\frac{3}{4}$, 且各题答对与否互不影响.

设甲答对的题数为 Y , 甲做完 4 道题后的总得分为 X .

(I) 试建立 X 关于 Y 的函数关系式, 并求 $P(X < 0)$;

(II) 求 X 的分布列及 $E(X)$.

20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^{x+m} - \ln x$.

(I) 若 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 求实数 m 的取值范围;

(II) 求证: $m \geq -2$ 时, $f(x) > 0$.

21. (本小题满分 12 分)

某公司对其产品研发的年投资额 x (单位: 百万元) 与其年销售量 y (单位: 千件) 的数据进行统计, 整理后得到如下统计表:

x	1	2	3	4	5
y	1.5	2	3.5	8	15

(I) 求变量 x 和 y 的样本相关系数 r (精确到 0.01), 并推断变量 x 和 y 的线性相关程度 (参考: 若 $|r| \geq 0.75$, 则线性相关程度很强; 若 $0.30 \leq |r| < 0.75$, 则线性相关程度一般; 如果 $|r| \leq 0.25$, 则线性相关程度较弱);

(II) 求年销售量 y 关于年投资额 x 的线性回归方程;

(III) 当公司对其产品研发的年投资额为 600 万元时, 估计产品的年销售量.

参考公式: 对于变量 x 和变量 y , 设经过随机抽样获得的成对样本数据为 (x_1, y_1) ,

$(x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 其中 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 的均值分别为 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$.

称 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$ 为变量 x 和 y 的样本相关系数.

线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中, $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

参考数据: $\sqrt{51} \approx 7.14$.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = a \sin x - \ln(1+x)$ ($a \in \mathbf{R}$) 在区间 $(-1, 0)$ 内存在极值点.

(I) 求 a 的取值范围;

(II) 判断关于 x 的方程 $f(x) = 0$ 在 $(-1, \pi)$ 内实数解的个数, 并说明理由.

2021~2022 学年度第二学期质量检测

高二数学参考答案及评分标准

一、单项选择题（每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	B	C	A	C	D

二、多项选择题(每小题 5 分，共 20 分)

9. BCD 10. AD 11. BC 12. BD

三、填空题(每小题 5 分，共 20 分)

13. $y = 3x - 2$ 14. 36 15. 6 16. $\frac{91}{6}$

四、解答题(共 70 分)

17. (本小题满分 10 分)

解：设事件 B 为“取到的产品是次品”， $A_i (i=1,2)$ 为“取到的产品来自第 i 批”。

..... 2 分

(I) 由全概率公式，所求概率为

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= 40\% \times 5\% + 60\% \times 4\% = 0.044. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) 所求概率为 $P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$= \frac{40\% \times 5\%}{0.044} = \frac{5}{11}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. (本小题满分 12 分)

(I) 解: 由题意, $n=6$ 2 分

展开式的通项 $T_{k+1} = C_6^k x^{6-k} \left(-\frac{a}{x}\right)^k = C_6^k (-a)^k x^{6-2k}$, $k=0,1,\dots,6$ 4 分

令 $6-2k=0$, 得 $k=3$ 5 分

由题意, 得 $C_6^3 (-a)^3 = -20$, 即 $-20a^3 = -20$ 6 分

解得 $a=1$ 7 分

(II) 解法 1: $1=[x+(1-x)]^{2022}$

$$= C_{2022}^0 x^{2022} + C_{2022}^1 x^{2021} (1-x) + C_{2022}^2 x^{2020} (1-x)^2 + \dots + C_{2022}^{2021} x (1-x)^{2021} + C_{2022}^{2022} (1-x)^{2022}$$

..... 9 分

$$\text{又 } a_0 x^{2022} + a_1 x^{2021} (1-x) + a_2 x^{2020} (1-x)^2 + \dots + a_{2022} (1-x)^{2022} = 1,$$

$$\text{所以 } \sum_{i=0}^{2022} a_i = C_{2022}^0 + C_{2022}^1 + C_{2022}^2 + \dots + C_{2022}^{2021} + C_{2022}^{2022} = 2^{2022}. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

解法 2: 由 (I), 知 $a_0 x^{2022} + a_1 x^{2021} (1-x) + a_2 x^{2020} (1-x)^2 + \dots + a_{2022} (1-x)^{2022} = 1$.

$$\text{令 } x = \frac{1}{2}, \text{ 得 } a_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{2022} + a_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{2021} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + a_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2020} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \dots + a_{2022} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2022} = 1,$$

..... 9 分

$$\text{即 } a_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{2022} + a_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{2022} + a_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2022} + \dots + a_{2022} \left(\frac{1}{2}\right)^{2022} = 1.$$

$$\text{上式两边同乘以 } 2^{2022}, \text{ 得 } \sum_{i=0}^{2022} a_i = 2^{2022}. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{由 } a_0 x^{2022} + a_1 x^{2021} (1-x) + a_2 x^{2020} (1-x)^2 + \dots + a_{2022} (1-x)^{2022} = 1,$$

$$\text{令 } x=1, \text{ 得 } a_0 = 1.$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^{2022} a_i = \sum_{i=0}^{2022} a_i - a_0 = 2^{2022} - 1. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (本小题满分 12 分)

(I) 由题意, $X = 4Y - 2(4 - Y) = 6Y - 8$ 2 分

由 $X = 6Y - 8 < 0$, 得 $Y < \frac{4}{3}$. 所以 $Y = 0, 1$ 3 分

所以 $P(X < 0) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = (\frac{1}{4})^4 + C_4^1 \times \frac{3}{4} \times (\frac{1}{4})^3 = \frac{13}{256}$ 4 分

(II) 由题意, 知 $Y \sim B(4, \frac{3}{4})$ 5 分

X 与 Y 的对应值表为:

Y	0	1	2	3	4
X	-8	-2	4	10	16

..... 6 分

于是, $P(X = -8) = P(Y = 0) = (1 - \frac{3}{4})^4 = \frac{1}{256}$; 7 分

$P(X = -2) = P(Y = 1) = C_4^1 \times (1 - \frac{3}{4})^3 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$; 8 分

$P(X = 4) = P(Y = 2) = C_4^2 \times (1 - \frac{3}{4})^2 \times (\frac{3}{4})^2 = \frac{27}{128}$; 9 分

$P(X = 10) = P(Y = 3) = C_4^3 \times (1 - \frac{3}{4}) \times (\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}$; 10 分

$P(X = 16) = P(Y = 4) = (\frac{3}{4})^4 = \frac{81}{256}$ 11 分

法 1: $E(X) = (-8) \times \frac{1}{256} + (-2) \times \frac{3}{64} + 4 \times \frac{27}{128} + 10 \times \frac{27}{64} + 16 \times \frac{81}{256} = 10$ 12 分

法 2: $E(X) = E(6Y - 8) = 6E(Y) - 8 = 6 \times (4 \times \frac{3}{4}) - 8 = 10$ 12 分

20. (本小题满分 12 分)

(I) 因为 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递增,

所以 $f'(x) = e^{x+m} - \frac{1}{x} \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 恒成立, 即 $x + m \geq \ln \frac{1}{x}$ 1 分

所以 $m \geq \ln \frac{1}{x} - x = -\ln x - x$ 2 分

令 $g(x) = -\ln x - x$, 显然 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最

大值为 $g(x)_{\max} = g(1) = -1$ 3 分

因此, $m \geq -1$ 4 分

(II) 当 $m \geq -2$ 时, $f(x) = e^{x+m} - \ln x \geq e^{x-2} - \ln x$. 只需证明 $e^{x-2} - \ln x > 0$.

证法 1: 令 $g(x) = e^{x-2} - \ln x$, 则函数 $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$g'(x) = e^{x-2} - \frac{1}{x}$. 因为 $y = e^{x-2}$ 是增函数, $y = -\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g'(x) = e^{x-2} - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 6 分

又因为 $g'(1) = e^{-1} - e^0 < 0$, $g'(e) = e^{e-2} - \frac{1}{e} > 1 - \frac{1}{e} > 0$,

由零点存在性定理, 存在唯一的 $x_0 \in (1, e)$, 使得 $g'(x_0) = e^{x_0-2} - \frac{1}{x_0} = 0$ 8 分

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g'(x) < g'(x_0) = 0$, $g(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $g'(x) > g'(x_0) = 0$, $g(x)$ 单调递增. 9 分

所以, $g(x)_{\min} = g(x_0) = e^{x_0-2} - \ln x_0$ 10 分

由 $g'(x_0) = e^{x_0-2} - \frac{1}{x_0} = 0$, 得 $e^{x_0-2} = \frac{1}{x_0}$, $x_0 - 2 = -\ln x_0$.

于是 $g(x)_{\min} = g(x_0) = \frac{1}{x_0} + x_0 - 2 > 2\sqrt{\frac{1}{x_0} \cdot x_0} - 2 = 0$.

所以, $g(x) = e^{x-2} - \ln x > 0$ 12 分

证法 2: 要证 $e^{x-2} - \ln x > 0$, 即证 $e^{x-2} - x > \ln x - x$ 5 分

设 $h_1(x) = e^{x-2} - x$, 则 $h_1'(x) = e^{x-2} - 1$.

$h_1'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-2} > 1 \Leftrightarrow x > 2$; $h_1'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$,

所以 $h_1(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增. 7 分

高二数学答案 第 4 页 (共 7 页)

所以 $h_1(x)_{\min} = h_1(2) = -1$ 8 分

设 $h_2(x) = \ln x - x$, 则 $h_2'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

$h_2'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$; $h_2'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$,

所以 $h_2(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. 10 分

所以 $h_2(x)_{\max} = h_2(1) = -1$ 11 分

可见, $h_1(x) > h_2(x)$. 所以原结论成立. 12 分

证法 3: 要证明 $e^{x-2} - \ln x > 0$, 而 $e^{x-2} \geq 1 + (x-2) = x-1$, 当且仅当 $x=2$ 时取等号;

$x-1 \geq \ln x$, 当且仅当 $x=1$ 时取等号.

所以 $e^{x-2} > \ln x$, 即 $e^{x-2} - \ln x > 0$.

注: 证明 $e^{x-2} \geq x-1$, $x-1 \geq \ln x$ 各得 3 分, 给出取等的条件各得 1 分.

21. (本小题满分 12 分)

解: (I) 由题意, $\bar{x} = 3$, $\bar{y} = 6$, 1 分

$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 55$, $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 123$, $\sum_{i=1}^5 y_i^2 = 307.5$ 2 分

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2}} \dots\dots\dots 3 \text{ 分} \\ &= \frac{123 - 5 \times 3 \times 6}{\sqrt{55 - 5 \times 9} \times \sqrt{307.5 - 5 \times 36}} \dots\dots\dots 4 \text{ 分} \\ &= \frac{33}{5\sqrt{51}} \approx 0.92. \dots\dots\dots 5 \text{ 分} \end{aligned}$$

因为 $|r| \geq 0.75$, 所以变量 x 和 y 的线性相关程度很强. 6 分

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad \hat{b} &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \cdots \cdots 7 \text{分} \\ &= \frac{123 - 5 \times 3 \times 6}{55 - 5 \times 3^2} = 3.3. \cdots \cdots 8 \text{分} \\ \hat{a} &= 6 - 3.3 \times 3 = -3.9. \cdots \cdots 9 \text{分} \end{aligned}$$

所以年销售量 y 关于年投资额 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 3.3x - 3.9$. $\cdots \cdots 10$ 分

(III) 当 $x = 6$ 时, 由 (II), $\hat{y} = 3.3 \times 6 - 3.9 = 15.9$.

所以研发的年投资额为 600 万元时, 产品的年销售量约为 15.9 千件. $\cdots \cdots 12$ 分

22. (本小题满分 12 分)

(I) 解: $f'(x) = a \cos x - \frac{1}{1+x} \quad (-1 < x < 0)$. $\cdots \cdots 1$ 分

① 当 $a \leq 1$ 时, 因为 $0 < \cos x < 1$, 所以 $f'(x) < 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} < 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上无极值点.

故 $a \leq 1$ 不符合题意. $\cdots \cdots 2$ 分

② 当 $a > 1$ 时, 因为 $y = a \cos x$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, $y = -\frac{1}{1+x}$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增,

所以 $f'(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增. $\cdots \cdots 3$ 分

又 $\frac{1}{a} - 1 \in (-1, 0)$, $f'(\frac{1}{a} - 1) = a \cos(\frac{1}{a} - 1) - a < 0$, $f'(0) = a - 1 > 0$,

所以存在唯一的 $x_1 \in (\frac{1}{a} - 1, 0)$, 使得 $f'(x_1) = 0$. $\cdots \cdots 5$ 分

当 $x \in (-1, x_1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (x_1, 0)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单

调递增. 所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内存在极小值点 x_1 . 满足题意.

综上, a 的取值范围是 $(1, +\infty)$. $\cdots \cdots 6$ 分

(II) 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f''(x) = -a \sin x + \frac{1}{(1+x)^2}$ 单调递减. 7 分

又 $f''(0) = 1 > 0$, $f''(\frac{\pi}{2}) = -a - \frac{4}{(2+\pi)^2} < 0$, 所以存在唯一的 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得

$f''(x_0) = 0$ 8 分

当 $0 < x < x_0$ 时, $f''(x) > 0$, $f'(x)$ 单调递增; 当 $x_0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f''(x) < 0$, $f'(x)$ 单调递减, 9 分

又 $f'(x_0) > f'(0) = a - 1 > 0$, $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{2}{2+\pi} < 0$, 所以存在唯一的 $\alpha \in (x_0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $f'(\alpha) = 0$.

当 $x \in (0, \alpha)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (\alpha, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) < 0$ 10 分

又当 $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ 时, $f'(x) < 0$ 恒成立,

结合 (I) 知, $f(x)$ 在 $(-1, x_1)$ 上单调递减, 在 (x_1, α) 上单调递增, 在 (α, π) 上单调递减. 又因为 $f(e^{-a} - 1) = a \sin(e^{-a} - 1) + a > 0$, $f(0) = 0$, $f(\pi) < 0$, $f(x_1) < 0$, $f(\alpha) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-1, \pi)$ 内共有三个零点, 方程 $f(x) = 0$ 在 $(-1, \pi)$ 内的实数解有三个. 12 分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。



微信搜一搜

Q 齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索