扬州市 2023 届高三考前调研测试
数学参考答案

1．B　2．A　3．C　4．C　5．B　6．D　7．C　8．A

9．ABD　10．AC　11．ACD　12．BC　13．1　14．$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$　15．10π　16．$y=x-1$ 或 $y=\frac{1}{e}x$

17.【解析】（1）若选择条件①：

$\because 2S_n=3a_n-3 \quad \therefore 2S_{n+1}=3a_{n+1}-3$，则 $2S_{n+1}-2S_n=3a_{n+1}-3a_n$

即 $a_{n+1}=3a_n$，……………………3 分

令 $n=1$，则 $2S_1=3a_1-3$，解得 $a_1=3\neq 0 \quad \therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=3$

$\therefore \{a_n\}$ 是以 3 为首项，3 为公比的等比数列　$\therefore a_n=3^n$ ……………………5 分

若选择条件②：

$\because a_1=3,\log_3 a_{n+1}-\log_3 a_n=1 \quad \therefore \{\log_3 a_n\}$ 是以 $\log_3 a_1=1$ 为首项，1 为公差的等差数列

$\therefore \log_3 a_n=1+(n-1)\times 1=n$ ……………………3 分

$\therefore a_n=3^n$ ……………………5 分

（2）$\therefore b_n=\frac{3n-9}{a_{n+1}}=\frac{n-3}{3^n}$ ……………………6 分

$\because b_{n+1}-b_n=\frac{n+1-3}{3^{n+1}}-\frac{n-3}{3^n}=\frac{7-2n}{3^{n+1}}$ ……………………7 分

$\therefore$ 当 $1\le n\le 3, b_{n+1}-b_n>0$，即 $b_1<b_2<b_3<b_4$；

当 $n\ge 4, b_{n+1}-b_n<0$，即 $b_4>b_5>b_6>b_7>\cdots$；……………………9 分

$\therefore$ 当 $n_0=4$ 时，$b_{n_0}\ge b_n$ 对 $\forall n\in \mathbf{N}^*$ 恒成立. ……………………10 分

18.【解析】（1）由题意得：$12+2m+20+32=100$，解得 $m=18$. ……………………2 分

故平均数为 $\frac{1}{100}\times(150\times 12+250\times 18+350\times 20+450\times 32+550\times 18)=376$. ……………………4 分

（2）由题意，$\mu=376$，且 $266=376-110=\mu-\sigma$，$596=376+220=\mu+2\sigma$，

故 $P(X>596)=P(X>\mu+2\sigma)=\frac{1}{2}\times(1-0.954)=0.023$，所以“优质群”约有 $1000\times 0.023=23$ 个；

$P(266\le X<596)=P(\mu-\sigma<X<\mu+2\sigma)=\frac{1}{2}\times 0.683+\frac{1}{2}\times 0.954=0.8185$，

所以“一级群”约有 $1000\times 0.8185=818.5\approx 819$ 个；……………………9 分

所以需要资金为 $23\times 1000+819\times 200=186800$，

故至少需要准备 186800 元. ……………………12 分

19.【解析】（1）$\because \sin^2 C=2\sin^2 B-2\sin^2 A$

$\therefore$ 在△ABC 中，由正弦定理得 $c^2=2b^2-2a^2$ ………………2 分

$\because b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \quad \therefore c^2+2a^2=2b^2=2a^2+2c^2-4ac\cos B \quad \therefore c=4a\cos B$ ………………4 分

（2）$\therefore$ 在△ABC 中，由正弦定理得：$\sin C=4\sin A\cos B$（显然角 B 为锐角）

$\because$ 在△ABC 中，$\sin C=\sin(A+B) \quad \therefore \sin A\cos B+\cos A\sin B=4\sin A\cos B$

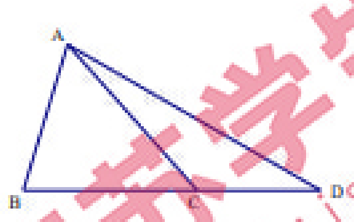
$\therefore \cos A\sin B=3\sin A\cos B$

$\because$ 角 B 为锐角　$\therefore$ 角 A 也为锐角　$\therefore \tan B=3\tan A$ ……………………8 分

$\because AD=BD$

$\therefore \angle B=\angle BAD=\angle A+\angle CAD$

$\therefore \angle CAD = B - A$ ……………………9 分



$\therefore \tan\angle CAD = \tan(B-A) = \dfrac{\tan B - \tan A}{1+\tan B\tan A}$

由（1）可知 $\tan B = 3\tan A$， $A \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \tan\angle CAD = \dfrac{2\tan A}{1+3\tan^2 A}$

$= \dfrac{2}{\dfrac{1}{\tan A}+3\tan A} \le \dfrac{2}{2\sqrt{\dfrac{1}{\tan A}\times 3\tan A}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ……………………11 分

当且仅当 $\dfrac{1}{\tan A} = 3\tan A$，即 $\tan A = \dfrac{\sqrt{3}}{3}, A = \dfrac{\pi}{6}$ 时取等号.

此时 $\angle DAC$ 的最大值为 $\dfrac{\pi}{6}$． ……………………12 分

20.【解析】（1）在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $ABC-A_1B_1C_1$ 是三棱柱，

$V_{B-ACC_1A_1} = \dfrac{2}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{3}V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = 2$， ………………………………2 分

设点 B 到平面 ACC_1A_1 的距离为 d，则 $V_{B-ACC_1A_1} = \dfrac{1}{3}S_{ACC_1A_1}\cdot d = \dfrac{1}{3}\times 6d = 2$，所以 $d=1$，

即点 B 到平面 ACC_1A_1 的距离为 1. ………………………………4 分

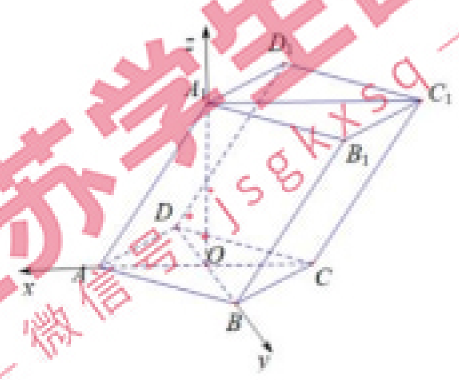
（2）在 $\square ABCD$ 中， $AB = AD = 2, \angle BAD = 60°$，所以 $ABCD$ 是菱形，连接 BD 交 AC 于 O，则 $BO=1$，

由（1）知点 B 到平面 ACC_1A_1 的距离为 1，所以 $BO \perp$ 平面 ACC_1A_1． ………6 分

设点 A_1 在直线 AC 上射影为点 H， $S_{\square ACC_1A_1} = AC\cdot A_1H = 2\sqrt{3}A_1H = 6$，

则 $A_1H = \sqrt{3}$，且 $BO \perp A_1H$， $AH = \sqrt{AA_1^2 - A_1H^2} = \sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$，

所以 O 和 H 重合，即 $A_1O \perp AO$． ………………………8 分



以 O 为坐标原点， OA, OB, OA_1 分别为 x 轴， y 轴， z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $B(0,1,0), A(\sqrt{3},0,0), D(0,-1,0), A_1(0,0,\sqrt{3})$，

根据 $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DD_1} = (-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$， $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (-\sqrt{3},1,0)$， 则 $D_1(-\sqrt{3},-1,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{BD_1} = (-\sqrt{3},-2,\sqrt{3})$，设平面 CC_1D_1D 的一法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DD_1}\cdot\vec{n} = -\sqrt{3}x+\sqrt{3}z = 0\\ \overrightarrow{DC}\cdot\vec{n} = -\sqrt{3}x+y = 0\end{cases}$，取 $x=1$，则 $\vec{n} = (1,\sqrt{3},1)$， ………………10 分

设直线 BD_1 与平面 CC_1D_1D 所成角为 α，则 $\sin\alpha = |\cos<\overrightarrow{BD_1},\vec{n}>| = \left|\dfrac{\overrightarrow{BD_1}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{BD_1}||\vec{n}|}\right| = \left|\dfrac{-\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}\right| = \dfrac{\sqrt{6}}{5}$，

所以直线 BD_1 与平面 CC_1D_1D 所成角正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$． ………………12 分

21.【解析】（1） $\because a^2 = b^2+c^2, \dfrac{2b^2}{a} = a+c = 3 \therefore a=2, b=\sqrt{3}, c=1$

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3} = 1$， ………………2 分

不妨取 $P(1,\dfrac{3}{2}), Q(1,-\dfrac{3}{2}), A(-2,0)$，则 $AP = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}, PF = \dfrac{3}{2}$；

因为△APQ 中， $AP = AQ$，所以△APQ 的内心在 x 轴，设直线 PT 平分 $\angle APQ$，交 x 轴于 T，则 T 为△APQ

的内心，且 $\frac{AT}{TF}=\frac{AP}{PQ}=\sqrt{5}$，所以 $AT=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$，则 $T(\frac{7-3\sqrt{5}}{4},0)$； …………4 分

（2）$\because$ 椭圆和弦 PQ 均关于 x 轴上下对称 $\therefore$ 若存在定点 D，则点 D 必在 x 轴上 $\therefore$ 设 $D(t,0)$ ……………6 分

设直线 l 方程为 $y=k(x-t)$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，直线方程与椭圆方程联立 $\begin{cases} y=k(x-t) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，

消去 y 得 $(4k^2+3)x^2-8k^2tx+4(k^2t^2-3)=0$，

则 $\Delta=48(k^2+3-k^2t^2)>0$，$x_1+x_2=\frac{8k^2t}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\frac{4(k^2t^2-3)}{4k^2+3}$ ① ………………8 分

$\because$ 点 R 的横坐标为 1，M、R、N、D 均在直线 l 上，$\overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{RN}$

$\therefore (1+k^2)(1-x_1)(t-x_2)=(1+k^2)(t-x_1)(x_2-1)$ ………………10 分

$\therefore 2t-(1+t)(x_1+x_2)+2x_1x_2=0$ $\therefore 2t-(1+t)\frac{8k^2t}{4k^2+3}+2\times\frac{4(k^2t^2-3)}{4k^2+3}=0$，整理得 $t=4$，

因为点 D 在椭圆外，则直线 l 的斜率必存在 $\therefore$ 存在定点 $D(4,0)$ 满足题意． ………………12 分

22.【解析】（1）$a=-1$ 时，设 $g(x)=f(x)+2x=-\sin x-\ln(1+x)+2x$，则 $g'(x)=-\cos x-\frac{1}{1+x}+2$，

$\because x>0 \therefore x+1>1$ $\therefore -\frac{1}{x+1}\in(-1,0)$ $\because \cos x\in[-1,1]$ $\therefore -\cos x-\frac{1}{x+1}+2>0$，即 $g'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增 又 $g(0)=0$ $\therefore g(x)>g(0)=0$，即：$\forall x>0$，$f(x)+2x>0$；………………4 分

（2）$a=1$ 时，当 $k=4$ 时，$f(2)=\sin 2-\ln 3<0$，所以 $k<4$． ………………5 分

下证 $k=3$ 符合．

$k=3$ 时，当 $x\in[0,\frac{3}{2}]$ 时，$\sin x>0$，所以当 $a\ge 1$ 时，$f(x)=a\sin x-\ln(1+x)\ge\sin x-\ln(1+x)$．

记 $h(x)=\sin x-\ln(1+x)$，则只需证 $h(x)=\sin x-\ln(1+x)\ge 0$ 对 $x\in[0,\frac{3}{2}]$ 恒成立．

$h'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$，令 $\phi(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$，则 $\phi'(x)=-\sin x+\frac{1}{(x+1)^2}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 递减，

又 $\phi'(0)=1>0,\phi'(\frac{\pi}{2})=-1+\frac{1}{(\frac{\pi}{2}+1)^2}<0$，所以存在 $x_1\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $\phi'(x_1)=0$，

则 $x\in(0,x_1),\phi'(x_1)>0,\phi(x)$ 在 $(0,x_1)$ 递增，$x\in(x_1,\frac{\pi}{2}),\phi'(x_1)<0,\phi(x)$ 在 $(x_1,\frac{\pi}{2})$ 递减；

又 $\phi(0)=0,\phi(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{\frac{\pi}{2}+1}<0$，所以存在 $x_2\in(x_1,\frac{\pi}{2})$ 使得 $\phi(x_2)=0$，且 $x\in(0,x_2),\phi(x)>0,x\in(x_2,\frac{\pi}{2}),\phi(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,x_2)$ 递增，在 $(x_2,\frac{\pi}{2})$ 递减，又 $h(0)=0,h(\frac{\pi}{2})=1-\ln(1+\frac{\pi}{2})>0$，所以 $h(x)\ge 0$ 对 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 恒成立

因为 $[0,\frac{3}{2}]\subseteq[0,\frac{\pi}{2}]$，所以 $k=3$ 符合．

综上，整数 k 的最大值为 3． ………………12 分