

晋城市 2021 年高三第三次模拟考试试题 数学(文科)

考生注意:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

第 I 卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 下列复数中实部与虚部互为相反数的是

- A. $2-i$ B. $(1-i)^2$
C. $i(1-2i)$ D. $i(1+i)$

2. 已知集合 $A=\{x \in \mathbb{Z} | -3 < x < 5\}$, $B=\{y | y=2x, x \in A\}$, 则 $A \cap B$ 的元素个数为

- A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

3. 若向量 $\overrightarrow{AB}=(1,2)$, $\overrightarrow{CB}=(3,-4)$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$

- A. -8 B. 10 C. 8 D. -10

4. 函数 $f(x)=x^3-\sin x$ 的图象的切线斜率可能为

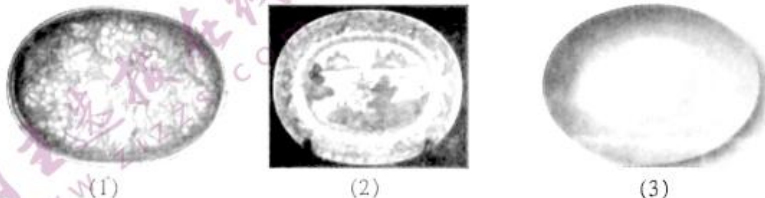
- A. -4 B. -3 C. -2 D. -1

5. 跑步是一项有氧运动,通过跑步,我们能提高肌力,同时提高体内的基础代谢水平,加速脂肪的燃烧,养成易瘦体质。小林最近给自己制定了一个 200 千米的跑步健身计划,他第一天跑了 8 千米,以后每天比前一天多跑 0.5 千米,则他要完成该计划至少需要

- A. 16 天 B. 18 天 C. 17 天 D. 19 天

6. 明朝的一个葡萄纹椭圆盘如图(1)所示,清朝的一个青花山水楼阁纹饰椭圆盘如图(2)所示,北宋的一个汝窑椭圆盘如图(3)所示,这三个椭圆盘的外轮廓均为椭圆。已知图(1),(2),(3)

中椭圆的长轴长与短轴长的比值分别为 $\frac{13}{9}, \frac{56}{45}, \frac{10}{7}$, 设图(1),(2),(3)中椭圆的离心率分别为 e_1, e_2, e_3 , 则



- A. $e_2 > e_1 > e_3$ B. $e_2 > e_3 > e_1$
C. $e_1 > e_2 > e_3$ D. $e_1 > e_3 > e_2$

【晋城市 2021 年高三第三次模拟考试试题数学 第 1 页(共 4 页)文科】



7. 已知函数 $f(x) = \lg x - (\frac{1}{2})^x$, $f(m) = 1$, 且 $0 < p < m < n$, 则

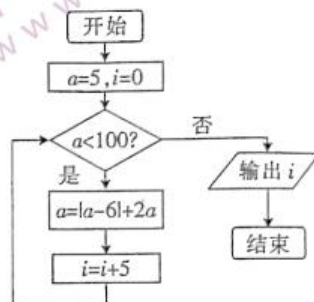
- A. $f(n) > 1$ 且 $f(p) < 1$ B. $f(n) > 1$ 且 $f(p) > 1$
C. $f(n) < 1$ 且 $f(p) > 1$ D. $f(n) < 1$ 且 $f(p) < 1$

8. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D 为该棱柱的九条棱中某条棱的中点, 若 $A_1C \parallel$ 平面 BC_1D , 则 D 为

- A. 棱 A_1B_1 的中点
B. 棱 AB 的中点
C. 棱 BC 的中点
D. 棱 AA_1 的中点

9. 执行如图所示的程序框图, 则输出的 $i =$

- A. 10
B. 20
C. 15
D. 25



10. 某服装店开张第一周进店消费的人数每天都在变化, 设第 x ($1 \leq x \leq 7, x \in \mathbb{N}$) 天进店消费的人数为 y , 且 y 与 $[\frac{5x}{x^2}]$ ($[t]$ 表示不大于 t 的最大整数) 成正比, 第 1 天有 10 人进店消费, 则第 4 天进店消费的人数为

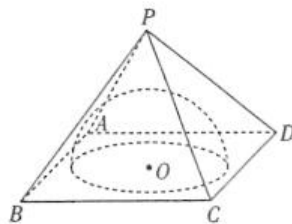
- A. 74 B. 78 C. 76 D. 80

11. 已知函数 $f(x) = \tan x - \sin x \cos x$, 则

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π
B. $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称
C. $f(x)$ 的图象关于 $(\pi, 0)$ 对称
D. $f(x)$ 的图象不关于 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 对称

12. 如图, 正四棱锥 $P-ABCD$ 的每个顶点都在球 M 的球面上, 侧面 PAB 是等边三角形. 若半球 O 的球心为四棱锥的底面中心, 且半球与四个侧面均相切, 则半球 O 的体积与球 M 的体积的比值为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{14}$
B. $\frac{\sqrt{3}}{16}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{15}$
D. $\frac{\sqrt{3}}{18}$



第 II 卷

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 某文学兴趣小组要从《飘》《围城》《红与黑》《西游记》《红楼梦》五本名著中任意选取两本, 一起交流读书心得, 则该小组选取的名著都是中国名著的概率为 $\frac{\triangle}{\triangle}$.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 3x+y \geq 0, \\ 2x-y \leq 5, \end{cases}$ 则 $x+y$ 的最 $\blacktriangle$ (填“大”或“小”)值为 $\blacktriangle$.

(本题第一空 2 分, 第二空 3 分)

15. 已知 $\triangle ABC$ 外接圆的直径为 d , $AB=4$, $AC=5$, $BC=7$, 则 $d=$ $\blacktriangle$.

16. 已知 P 是双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 右支上一点, 则 P 到直线 $y=2x$ 的距离与 P 到点 $F(-2, 0)$ 的距离之和的最小值为 $\blacktriangle$.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤. 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

2021 年受疫情影响, 国家鼓励员工在工作地过年. 某机构统计了某市 5 个地区的外来务工人员数与他们选择留在当地过年的人数占比, 得到如下的表格:

	A 区	B 区	C 区	D 区	E 区
外来务工人员数	5000	4000	3500	3000	2500
留在当地的人数占比	80%	90%	80%	80%	84%

根据这 5 个地区的数据求得留在当地过年人员数 y 与外来务工人员数 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 0.8135x + \hat{a}$.

(1) 求 $\hat{a}$ 的值;

(2) 该市对外来务工人员选择留在当地过年的每人补贴 1000 元, 该市 F 区有 10000 名外来务工人员, 试根据线性回归方程估计 F 区需要给外来务工人员中留在当地过年的人的补贴总额. (结果用万元表示)

参考数据: 取 $0.8135 \times 36 = 29.29$.

18. (12 分)

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $(n^2 + 1)a_{n+1} = 2[(n-1)^2 + 1]a_n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

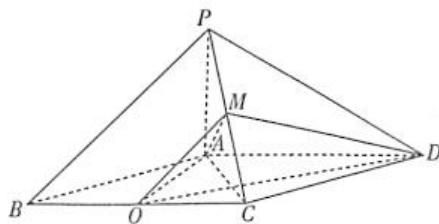
(2) 设 $b_n = (n^3 - 2n^2 + 2n)a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 以 BC 为直径的圆 O (O 为圆心) 过点 A , 且 $AO = AC = AP = 2$, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, M 为 PC 的中点.

(1) 证明: 平面 $OAM \perp$ 平面 PCD .

(2) 求四棱锥 $M-AOCD$ 的侧面积.



20. (12 分)

已知函数 $f(x) = (x^3 - \frac{4}{3}x^2)e^x$ 的定义域为 $[-1, +\infty)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 讨论函数 $g(x) = f(x) - a$ 在 $[-1, 2]$ 上的零点个数.

21. (12 分)

已知 F 为抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点, 直线 $l: y = 2x + 1$ 与 C 交于 A, B 两点, 且 $|AF| + |BF| = 20$.

(1) 求 C 的方程.

(2) 若直线 $m: y = 2x + t (t \neq 1)$ 与 C 交于 M, N 两点, 且 AM 与 BN 相交于点 T , 证明: 点 T 在定直线上.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生从第 22, 23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一个题目计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的方程为 $x = \sqrt{-y^2 + 2y + 3}$.

(1) 写出曲线 C 的一个参数方程;

(2) 若 $A(1, 0), B(-1, 0)$, 点 P 为曲线 C 上的动点, 求 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$ 的取值范围.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x + a| + |x + b|$.

(1) 若 $a = b^2 + 3b + 2$, 证明: $\forall x \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}, f(x) \geq 1$.

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq 7$ 的解集为 $[-6, 1]$, 求 a, b 的一组值, 并说明你的理由.



晋城市 2021 年高三第三次模拟考试试题 数学参考答案(文科)

1. D 【解析】本题考查复数的实部与虚部,考查运算求解能力.

因为 $i(1+i)=-1+i$, 所以 $i(1+i)$ 的实部与虚部互为相反数.

2. C 【解析】本题考查集合的交集,考查运算求解能力.

因为 $A=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$, $B=\{-4,-2,0,2,4,6,8\}$, 所以 $A \cap B=\{-2,0,2,4\}$.

3. B 【解析】本题考查平面向量的数量积,考查运算求解能力.

因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=(-2,6)$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}=-2+12=10$.

4. D 【解析】本题考查导数的几何意义,考查推理论证能力.

因为 $f'(x)=3x^2-\cos x \geq -\cos x \geq -1$ (当 $x=0$ 时等号成立), 所以切线的斜率可能为 -1 .

5. C 【解析】本题考查等差数列的应用,考查数学建模与逻辑推理的核心素养.

依题意可得,他从第一天开始每天跑步的路程(单位:千米)依次成等差数列,且首项为 8,公差为 0.5. 设经过

n 天后他完成健身计划, 则 $S_n = \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{2} \geq 200$, 整理得 $n^2+31n-800 \geq 0$.

因为函数 $f(x)=x^2+31x-800$ 在 $[1, +\infty)$ 上为增函数, 且 $f(16)<0$, $f(17)>0$, 所以 $n \geq 17$.

6. D 【解析】本题考查椭圆的离心率与中国古代数学文化,考查数据处理能力与推理论证能力.

因为椭圆的离心率 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-(\frac{2b}{2a})^2}$, 所以长轴长与短轴长的比值越大, 离心率越大. 因为 $\frac{13}{9} \approx$

1.44 , $\frac{56}{45} \approx 1.24$, $\frac{10}{7} \approx 1.43$, 所以 $e_1 > e_3 > e_2$.

7. A 【解析】本题考查基本初等函数的单调性,考查推理论证能力.

因为 $y=\lg x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $y=(\frac{1}{2})^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 又 $f(m)=1$, 且 $0 < p < m < n$, 所以 $f(n) > 1$ 且 $f(p) < 1$.

8. A 【解析】本题考查线面平行的判定,考查直观想象、推理论证的核心素养.

如图, 当 D 为棱 A_1B_1 的中点时, 取 AB 的中点 E , 易证平面 $A_1CE \parallel$ 平面 BC_1D , 则 $A_1C \parallel$ 平面 BC_1D .

9. B 【解析】本题考查程序框图,考查运算求解能力.

$a=1+10=11$, $i=5$; $a=5+22=27$, $i=10$; $a=21+54=75$, $i=15$; $a=69+150 > 100$, $i=20$. 故输出的 $i=20$.

10. B 【解析】本题考查函数模型的应用,考查应用意识与数学建模的核心素养.

依题意可设 $y=k[\frac{5^x}{x^2}]$, 当 $x=1$ 时, $y=5k=10$, 解得 $k=2$, 故当 $x=4$ 时,

$y=2 \times [\frac{5^4}{4^2}]$. 因为 $\frac{5^4}{4^2} \approx 39.1$, 所以 $[\frac{5^4}{4^2}]=39$, 所以 $y=2 \times [\frac{5^4}{4^2}]=78$.

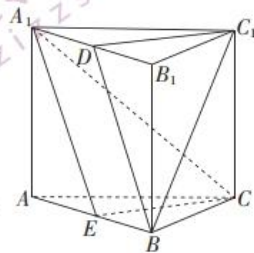
11. C 【解析】本题考查三角函数的对称性与周期,考查逻辑推理的核心素养.

因为 $f(x+\pi)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 的最小正周期不是 2π .

因为 $f(-x)=-f(x) \neq f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数, 其图象不关于 y 轴对称.

因为 $f(\pi-x)=-\tan x + \sin x \cos x = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 对称.

因为 $f(2\pi-x)=-\tan x + \sin x \cos x = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于 $(\pi, 0)$ 对称.



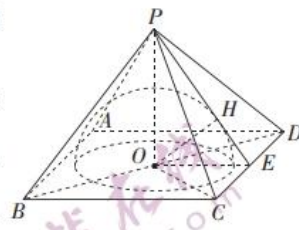
12. D 【解析】本题考查四棱锥的外接球与内切球,考查空间想象能力与运算求解能力.

如图,连接 PO, BD , 取 CD 的中点 E , 连接 PE, OE , 过 O 作 $OH \perp PE$ 于 H . 易知

$PO \perp$ 底面 $ABCD$, 设 $AB=4$, 则 $BD = \sqrt{BA^2 + BC^2} = 4\sqrt{2}$, $BO = \frac{1}{2}BD = 2\sqrt{2}$,

$PO = \sqrt{BP^2 - BO^2} = 2\sqrt{2}$. 设球 M 的半径为 R , 半球 O 的半径为 R_0 , 则 $R =$

$2\sqrt{2}$. 易知 $R_0 = OH$, 则 $\frac{R_0}{R} = \frac{OH}{PO} = \frac{OE}{PE} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 故 $\frac{V_{半球O}}{V_{球M}} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4\pi R_0^3}{3}}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{18}$.

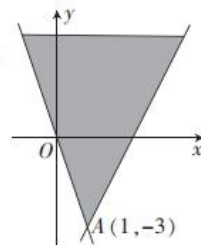


13. $\frac{3}{10}$ (或 0.3) 【解析】本题考查古典概型,考查运算求解能力.

五本名著中任意选取两本共有 10 种不同的选择,因为这五本名著中中国名著是《围城》《西游记》《红楼梦》,所以任意选取两本都是中国名著的情况有 3 种,故所求概率为 $\frac{3}{10}$.

14. 小; -2 【解析】本题考查线性规划,考查推理论证能力与运算求解能力.

作出约束条件表示的可行域,由图可知,当直线 $z = x + y$ 经过点 $A(1, -3)$ 时,取得最小值,且最小值为 -2.



15. $\frac{35\sqrt{6}}{12}$ 【解析】本题考查解三角形,考查运算求解能力.

因为 $\cos A = \frac{4^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 4 \times 5} = -\frac{1}{5}$, 所以 $\sin A = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, 所以 $d = \frac{BC}{\sin A} = \frac{35\sqrt{6}}{12}$.

16. $\frac{4\sqrt{5}}{5} + 2$ (或 $\frac{4\sqrt{5} + 10}{5}$) 【解析】本题考查双曲线的定义的应用,考查化归与转化的数学思想.

易知 $F(-2, 0)$ 是双曲线的左焦点, 设右焦点为 F' , 则 $|PF| - |PF'| = 2a = 2$,

所以 $|PF| = |PF'| + 2$, 所以当 P 到直线 $y = 2x$ 的距离与 P 到点 $F(-2, 0)$ 的距离之和取得最小值时, P 到直线 $y = 2x$ 的距离与 P 到点 F' 的距离之和也取得最小值.

因为 F' 到直线 $y = 2x$ 的距离 $d = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, 所以所求最小值为 $d + 2 = \frac{4\sqrt{5}}{5} + 2$.

17. 解: (1) $\bar{x} = \frac{5000 + 4000 + 3500 + 3000 + 2500}{5} = 3600$ 1 分

依题意可得 A, B, C, D, E 五个地区的外来务工人员中,

留在当地的人数分别为 1000, 3600, 2800, 2400, 2100, 3 分

则 $\bar{y} = \frac{4000 + 3600 + 2800 + 2400 + 2100}{5} = 2980$ 4 分

因为 $\bar{y} = 0.8135\bar{x} + \hat{a}$, 5 分

所以代入数据, 得 $\hat{a} = 2980 - 0.8135 \times 3600 = 2980 - 100 \times 29.29 = 51$ 7 分

(2) 当 $x = 10000$ 时, $\hat{y} = 0.8135 \times 10000 + 51 = 8186$, 9 分

故补贴总额约为 $8186 \times 1000 = 818.6$ 万元. 12 分

评分细则:

【1】第(1)问没有分别求五个地区留在当地的人数, 直接由公式得

$\bar{y} = \frac{5000 \times 80\% + 4000 \times 90\% + 3500 \times 80\% + 3000 \times 80\% + 2500 \times 84\%}{5} = 2980$, 不扣分.

【2】第(2)问中, 最后的结论没有说明是“约为”或“估计值为”, 而直接写补贴总额为 818.6 万元, 扣 1 分.

【3】两问中 $\hat{a}, \hat{y}$ 写成 a, y , 即没有写“ $\hat{\cdot}$ ”, 两问共扣 1 分, 不要累计扣分.

18. 解: (1) 因为 $(n^2 + 1)a_{n+1} = 2[(n-1)^2 + 1]a_n$, 且 $a_1 = 2$,

所以数列 $\{[(n-1)^2 + 1]a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列,

则 $[(n-1)^2+1]a_n=2^n$, 4 分
 所以 $a_n=\frac{2^n}{(n-1)^2+1}=\frac{2^n}{n^2-2n+2}$ 5 分
 (2) 因为 $b_n=(n^3-2n^2+2n)a_n=n \cdot 2^n$, 6 分
 所以 $T_n=2+2 \times 2^2+\cdots+n \cdot 2^n$, 7 分
 则 $2T_n=2^2+2 \times 2^3+\cdots+n \cdot 2^{n+1}$, 8 分
 则 $-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n \cdot 2^{n+1}$ 9 分
 $=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n \cdot 2^{n+1}$ 10 分
 $= (1-n) \cdot 2^{n+1}-2$, 11 分
 故 $T_n=(n-1) \cdot 2^{n+1}+2$ 12 分
 评分细则:

【1】第(1)问指出数列 $\{[(n-1)^2+1]a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 首项如果错了而公比正确, 本题只给 1 分.

【2】第(2)问严格按步骤给分.

19. (1) 证明: 由题意点 A 为圆 O 上一点, 则 $AB \perp AC$ 1 分
 由 $PA \perp$ 底面 ABCD, 知 $PA \perp AB$. 又 $PA \cap AC=A$, 因此 $AB \perp$ 平面 PAC, 2 分
 则 $AB \perp AM$. 又 $AB \parallel CD$, 则 $AM \perp CD$ 3 分
 因为 $AC=AP$, M 为 PC 的中点, 所以 $AM \perp PC$ 4 分
 又 $CD \cap PC=C$, 所以 $AM \perp$ 平面 PCD. 5 分
 因为 $AM \subset$ 平面 OAM, 所以平面 OAM $\perp$ 平面 PCD. 6 分
 (2) 解: 由(1)知 $AM \perp$ 平面 PCD, 所以 $AM \perp MD$,

$$AM=\frac{\sqrt{2}}{2}PA=\sqrt{2}, MD=\sqrt{AD^2-AM^2}=\sqrt{4^2-2}=\sqrt{14},$$

$$\text{因此, } S_{\triangle AMD}=\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{14}}{2}=\sqrt{7}. \quad \text{..... 7 分}$$

因为 $BP=BC=4$, O, M 分别为 BC, PC 的中点, 所以 $OM=\frac{1}{2}BP=2=OA$.

$$\text{设 } AM \text{ 边的高为 } h, \text{ 则 } h=\sqrt{OA^2-(\frac{AM}{2})^2}=\frac{\sqrt{11}}{2}, S_{\triangle OAM}=\frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{14}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{2}. \quad \text{..... 8 分}$$

$$\text{又因为 } OA=OC, MA=MC, \text{ 所以 } S_{\triangle OCM}=S_{\triangle OAM}=\frac{\sqrt{7}}{2}. \quad \text{..... 9 分}$$

$$\text{由 } V_{M-ACD}=V_{A-CMD}, \text{ 可得 } \frac{1}{3} \times \frac{PA}{2} \cdot S_{\triangle ACD}=\frac{1}{3} \times AM \cdot S_{\triangle CMD}, \quad \text{..... 10 分}$$

$$\text{得 } S_{\triangle CMD}=\sqrt{6}. \quad \text{..... 11 分}$$

$$\text{故四棱锥 } M-AOCD \text{ 的侧面积 } S=2\sqrt{7}+\sqrt{6}. \quad \text{..... 12 分}$$

评分细则:

【1】第(1)问严格按步骤给分.

【2】第(2)问中, 还可以根据 $CM \perp CD$, 求得 $S_{\triangle CMD}=\sqrt{6}$.

20. 解: (1) $f'(x)=(x^3+\frac{5}{3}x^2-\frac{8}{3}x)e^x=\frac{x}{3}(3x+8)(x-1)e^x$, 1 分

因为 $x \in [-1, +\infty)$, 所以 $f'(x)$ 的零点为 0 和 1. 2 分

令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$; 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 1$ 或 $-1 \leq x < 0$ 4 分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $[-1, 0)$, $(1, +\infty)$ 6 分

(2) 由(1)知, $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上的极大值为 $f(0)=0$,

极小值为 $f(1) = -\frac{e}{3}$, 7 分

因为 $f(-1) = -\frac{7}{3e}$, $\frac{f(-1)}{f(1)} = \frac{7}{e^2} < \frac{7}{2 \cdot 7^2} < 1$, 所以 $f(1) < f(-1) < 0$ 8 分

$f(2) = \frac{8e^2}{3}$, 由 $g(x) = 0$, 得 $f(x) = a$.

当 $a < -\frac{e}{3}$ 或 $a > \frac{8e^2}{3}$ 时, $g(x)$ 的零点个数 0; 9 分

当 $a = -\frac{e}{3}$ 或 $0 < a \leq \frac{8e^2}{3}$ 时, $g(x)$ 的零点个数 1; 10 分

当 $-\frac{e}{3} < a < -\frac{7}{3e}$ 或 $a = 0$ 时, $g(x)$ 的零点个数 2; 11 分

当 $-\frac{7}{3e} \leq a < 0$ 时, $g(x)$ 的零点个数 3. 12 分

评分细则:

【1】第(1)问求导正确但没有因式分解不扣分.

【2】第(2)问没有推理过程就得到 $f(1) < f(-1) < 0$, 扣 1 分.

21. (1) 解: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} y = 2x + 1, \\ x^2 = 2py, \end{cases}$ 得 $y^2 - (8p + 2)y + 1 = 0$, 2 分

则 $y_1 + y_2 = 8p + 2$ 3 分

从而 $|AF| + |BF| = y_1 + \frac{p}{2} + y_2 + \frac{p}{2} = 9p + 2 = 20$, 5 分

解得 $p = 2$, 故 C 的方程为 $x^2 = 4y$ 6 分

(2) 证明: 设 $M(x_3, y_3), N(x_4, y_4), T(x_0, y_0)$, $\overrightarrow{TM} = \lambda \overrightarrow{TA} (\lambda \neq 1)$.

因为 $AB \parallel MN$, 所以 $\overrightarrow{TN} = \lambda \overrightarrow{TB}$ 7 分

根据 $\begin{cases} x_1^2 = 4y_1, \\ x_2^2 = 4y_2, \end{cases}$ 得 $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 4(y_1 - y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{4(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2} = 8$,

同理得 $x_3 + x_4 = 8$ 9 分

又 $\begin{cases} x_3 - x_0 = \lambda(x_1 - x_0), \\ x_4 - x_0 = \lambda(x_2 - x_0), \end{cases}$ 两式相加得 $x_3 + x_4 - 2x_0 = \lambda(x_1 + x_2 - 2x_0)$, 10 分

即 $(4 - x_0)(1 - \lambda) = 0$, 由于 $\lambda \neq 1$, 所以 $x_0 = 4$ 11 分

故点 T 在定直线 $x = 4$ 上. 12 分

评分细则:

【1】第(1)问还可以通过联立消去 y , 其步骤及给分如下:

由 $\begin{cases} y = 2x + 1, \\ x^2 = 2py, \end{cases}$ 得 $x^2 - 4px - 2p = 0$, 1 分

则 $x_1 + x_2 = 4p$, 2 分

$y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2) + 2 = 8p + 2$ 3 分

从而 $|AF| + |BF| = y_1 + \frac{p}{2} + y_2 + \frac{p}{2} = 9p + 2 = 20$, 5 分

解得 $p = 2$, 故 C 的方程为 $x^2 = 4y$ 6 分

【2】第(2)问若用其他方法解答, 请按照步骤给分.

22. 解: (1) 由 $x = \sqrt{-y^2 + 2y + 3}$, 得 $x^2 = -y^2 + 2y + 3$, 1 分

整理得 $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ 2 分

又 $x = \sqrt{-y^2 + 2y + 3} \geq 0$, 3 分

所以曲线 C 的一个参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos \theta, \\ y = 1 + 2\sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数, 且 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$). 5 分

(2)由(1)可设点 P 的坐标为 $(2\cos \theta, 1+2\sin \theta)$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 6 分

因为 $\overrightarrow{PA} = (1-2\cos \theta, -1-2\sin \theta)$, $\overrightarrow{PB} = (-1-2\cos \theta, -1-2\sin \theta)$,

所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (1-2\cos \theta)(-1-2\cos \theta) + (-1-2\sin \theta)^2 = 4+4\sin \theta$ 7 分

又 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 2\cos \theta$,

所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 4+4(\sin \theta + \cos \theta) = 4+4\sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ 8 分

因为 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \leq 1$, 9 分

故 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$ 的取值范围是 $[0, 4+4\sqrt{2}]$ 10 分

评分细则:

【1】第(1)问中,得到 $x^2 + (y-1)^2 = 4$ 后直接得出曲线 C 的一个参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos \theta, \\ y=1+2\sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数),扣 2 分.

【2】第(1)问的参数方程不唯一,只要参数方程对应的曲线为圆 $x^2 + (y-1)^2 = 4$ 的右半部分均可得分.

【3】第(2)问中设点 P 的坐标为 $(2\cos \theta, 1+2\sin \theta)$,后面没有写明 θ 的取值范围,扣 1 分.

23. (1)证明: $f(x) = |x+a| + |x+b| \geq |x+a - (x+b)| = |a-b|$ 2 分

因为 $a = b^2 + 3b + 2$, 所以 $|a-b| = |b^2 + 2b + 2| = (b+1)^2 + 1 \geq 1$, 3 分

当 $b = -1$ 时, $|a-b|$ 取得最小值 1, 故 $\forall x \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}, f(x) \geq 1$ 4 分

(2)解:依题意可得 $f(-6) = f(1) = 7$,

即 $|a-6| + |b-6| = |1+a| + |1+b| = 7$, 5 分

不妨取 $a=0$, 则 $b=5$ 6 分

下面证明 $|x| + |x+5| \leq 7$ 的解集为 $[-6, 1]$.

证明:当 $x \leq -5$ 时, $-2x-5 \leq 7$, 则 $x \geq -6$, 又 $x \leq -5$, 所以 $-6 \leq x \leq -5$ 7 分

当 $-5 < x < 0$ 时, $5 \leq 7$ 显然成立, 所以 $-5 < x < 0$ 8 分

当 $x \geq 0$ 时, $2x+5 \leq 7$, 则 $x \leq 1$, 又 $x \geq 0$, 所以 $0 \leq x \leq 1$ 9 分

所以 $|x| + |x+5| \leq 7$ 的解集为 $[-6, 1]$, 故 a, b 的一组值为 0, 5. 10 分

评分细则:

【1】第(1)问中,未写 $b = -1$ 不扣分.

【2】第(2)问中, a, b 的一组值不唯一, 但 $a+b=5$, 且 $a, b \in [-1, 6]$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。

总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》