运城市 2022-2023 学年第一学期期末

数学试题答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题所给的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

DADB　　DBCA

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分.

9. CD　　10.ABC　　11. BD　　12. ABD

二、填空题： 本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. -84.　　14. $-\frac{1}{3}\vec{b}$　　15. $(0,+\infty)$　　16. $\frac{\sqrt{105}}{15}$

四、解答题：（本小题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.解：（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

则$\begin{cases} a_3+a_7=2a_1+8d=18 \\ a_1+a_5=2a_1+4d=10 \end{cases}$，解得$d=2$，$a_1=1$，………1 分

$\therefore a_n=2n-1$；………2 分

设等比数列$\{b_n\}$的公比为$q(q>0)$，

则$\begin{cases} b_3+b_5=b_3(1+q^2)=\frac{5}{16} \\ b_1b_5=b_3^2=\frac{1}{16} \end{cases}$，解得$b_3=\frac{1}{4}$，$q=\frac{1}{2}$，$b_1=1$，………3 分

$\therefore b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$………4 分

（2）由（1）可知$c_n=\frac{3n+1}{2^n}$………5 分

$\therefore T_n=\frac{4}{2}+\frac{7}{2^2}+\cdots+\frac{3n+1}{2^n}$，………6 分

则$\frac{1}{2}T_n=\frac{4}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\cdots+\frac{3n+1}{2^{n+1}}$，………7 分

两式相减得：$\frac{1}{2}T_n=2+3\times\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-\frac{3n+1}{2^{n+1}}=2+3\times\frac{\frac{1}{2^2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{3n+1}{2^{n+1}}=\frac{7}{2}-\frac{3n+7}{2^{n+1}}$，

………9 分

$\therefore T_n=7-\frac{3n+7}{2^n}$. ………10 分

18. 解（1）$\because \frac{cosC}{acosB+bcosA}=\frac{cosA+cosB}{a+b}$ 且在ΔABC中有 c=acosB+bcosA, $\therefore \frac{cosC}{c}=\frac{cosA+cosB}{a+b}$, (1 分)

由正弦定理可得$\frac{cosC}{sinC}=\frac{cosA+cosB}{sinA+sinB}$, ………2 分

整理可得: $\sin C\cos A+\sin C\cos B=\sin A\cos C+\sin B\cos C$,

即 $\sin C\cos A-\sin A\cos C=\sin B\cos C-\sin C\cos B$,

即: $\sin(C-A)=\sin(B-C)$, ·········3 分

又因为锐角 ΔABC, 所以 $C-A\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $B-C\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 所以 $C-A=B-C$, ······4 分

即 $A+B=2C$, 又 $A+B+C=\pi$, 所以 $C=\frac{\pi}{3}$; ·········5 分

(2) 由题意可知 $\angle ADB=\frac{2\pi}{3}$, 设 $\angle DAB=\alpha$, 所以 $\angle ABD=\frac{\pi}{3}-\alpha$,

又 $0<2\alpha<\frac{\pi}{2}$, $B=\pi-\frac{\pi}{3}-2\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$, 所以 $\alpha\in(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4})$, ·········6 分

在 ΔABD 中, 由正弦定理可得 $\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{AD}{\sin\angle ABD}$,

即 $\frac{3}{sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{AD}{sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)}$, 所以 $\mathrm{AD}=2\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)$, ·········8 分

$\therefore S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot ADsin\alpha=\frac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{3}sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)sin\alpha=\frac{9}{2}sin\alpha\cdot cos\alpha-\frac{3\sqrt{3}}{2}sin^2\alpha$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}sin(2\alpha+\frac{\pi}{6})-\frac{3\sqrt{3}}{4}$, ·········10 分

又 $\alpha\in(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4})$, $\therefore 2\alpha+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$,

所以 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{6})\in(\frac{\sqrt{3}}{2},1]$ ·········11 分

所以 $\frac{3\sqrt{3}}{2}sin(2\alpha+\frac{\pi}{6})-\frac{3\sqrt{3}}{4}\in(\frac{9-3\sqrt{3}}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4}]$

即 ΔABD 面积的取值范围为 $(\frac{9-3\sqrt{3}}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4}]$ ······12 分

19. (1) 解:由题知, $r=50-20-22=8, s=20-12=8$,

将表格填完整如下所示:

	球队胜	球队负	总计
A 参加	22	8	30
A 未参加	8	12	20
总计	30	20	50

………2 分

$\therefore \aleph^2=\frac{50(22\times12-8\times8)^2}{30\times20\times30\times20}=\frac{50}{9}\approx5.56$,………3 分

$\because 3.841<5.56<6.635$,

所以没有 99%的把握认为球队胜利与 A 球员参赛有关;………4 分

（2）①由题知,记“B 球员参加比赛,比赛赢球”为事件A,

$\therefore P(A)=0.2\times0.2+0.3\times0.2+0.2\times0.4+0.3\times0.3=0.27$,

故 B 球员参加比赛,比赛赢球的概率为 0.27;………6 分

②由题知,记“B 球员担当守门”为事件B,

则$P(AB)=0.3\times0.3=0.09$,

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.09}{0.27}=\frac{1}{3}$,

故球队赢了比赛的条件下,B 球员担当前锋的概率为$\frac{1}{3}$………8 分

③依题意， X 的可能取的值为 0，1，2，3, 4 则 $X\sim B(4,\frac{1}{3})$,

$P(X=0)=C_4^0\times(\frac{1}{3})^0(\frac{2}{3})^4=\frac{16}{81}$

$P(X=1)=C_4^1\times(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^3=\frac{32}{81}$

$P(X=2)=C_4^2\times(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2=\frac{8}{27}$

$P(X=3)=C_4^3\times(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^1=\frac{8}{81}$

$P(X=4)=C_4^4\times(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})^0=\frac{1}{81}$ ………10 分

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

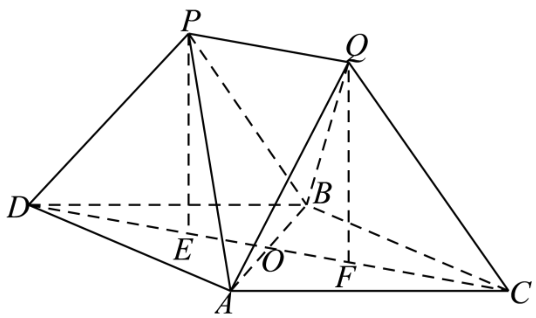
数学期望 $E(X)=np=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ ………12 分

20. 解：(1)证明:因为$\triangle ABD$与$\triangle ABC$共面,所以连接CD与AB相交于点O,

因为四面体$PABD$和$QABC$是相同的正四面体,所以,ΔABC、$\triangle ABD$都是等边三角形,

则$AC=BC=AB=AD=BD$,所以四边形$ACBD$为菱形,则O为AB、CD 的中点,

………1 分



过点 P、Q 分别作 $PE\perp$ 平面 ABD、$QF\perp$ 平面 ABC，垂足分别为 E、F，

根据正四面体的性质可知 E、F 分别为 $\triangle ABD$、ΔABC 的中心且 E,F 在 DC 上，

且 $PE//QF$，………2 分

因为正四面体 $PABD$ 的棱长为 $2\sqrt{3}$，则 $OD=AD\cdot\sin 60^{\circ}=3$，$DE=\dfrac{2}{3}OD=2$，E0=F0=1

$\because PE\perp$ 平面 ABD，$DE\subset$ 平面 ABD，$\therefore PE\perp DE$，

$\therefore PE=\sqrt{PD^{2}-DE^{2}}=2\sqrt{2}$，同理可得 $QF=2\sqrt{2}$，

所以 $PE=QF$，故四边形 $PQFE$ 为平行四边形，故 $PQ//CD$，………4 分

因为四边形 $ACBD$ 为菱形，则 $CD\perp AB$，所以 AB⊥PQ ………5 分

（2）依题知 $AD=2\sqrt{3}$，取线段 PQ 的中点 M，连接 OM，

易知 $OE=OF=\dfrac{1}{3}OD=1$，所以 O 为 EF 的中点，

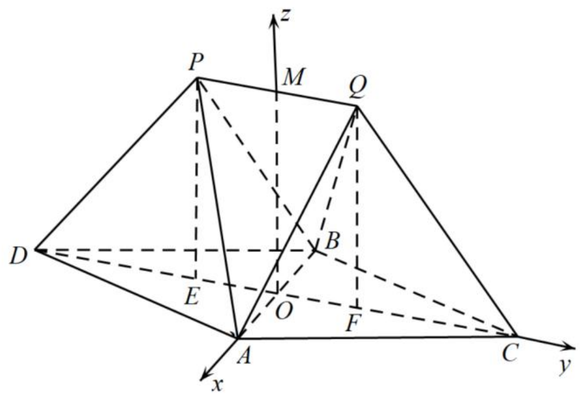
因为四边形 $PQFE$ 为平行四边形，则 $PQ//EF$ 且 $PQ=EF$，………6 分

因为 O、M 分别为 EF、PQ 的中点，则 $OE//PM$ 且 $OE=PM$，

所以，四边形 $PEOM$ 为平行四边形，则 $OM//PE$，所以，$OM\perp$ 平面 $ACBD$，

………7 分

因为 $AB\perp CD$，以点 O 为坐标原点，OA、OC、OM 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系，



则 $A(\sqrt{3},0,0),B(-\sqrt{3},0,0),P(0,-1,2\sqrt{2}),Q(0,1,2\sqrt{2})$， ………8 分

设平面 PAQ 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1),\overrightarrow{PQ}=(0,2,0),\overrightarrow{AP}=(-\sqrt{3},-1,2\sqrt{2})$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PQ}=2y_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AP}=-\sqrt{3}x_1-y_1+2\sqrt{2}z_1=0\end{cases}$，取 $x_1=2\sqrt{2}$，可得：$\vec{m}=(2\sqrt{2},0,\sqrt{3})$， ………9 分

设平面 BAQ 的法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{BQ}=(\sqrt{3},1,2\sqrt{2}),\overrightarrow{BA}=(2\sqrt{3},0,0)$

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}=2\sqrt{3}x_2=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BQ}=\sqrt{3}x_2+y_2+2\sqrt{2}z_2=0\end{cases}$，取 $y_2=2\sqrt{2}$，可得：$\vec{n}=(0,2\sqrt{2},-1)$， ………10 分

$\therefore \cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{11}\times 3}=-\frac{\sqrt{33}}{33}$. ………11 分

由图形可知，二面角 P-AQ-B 的平面角为锐角，故二面角 P-AQ-B 的余弦值为 $\frac{\sqrt{33}}{33}$.

………12 分

21 解：（1）依题意知 F（1，0），所以 A(1，2)，B(1，-2)……1 分

设 P（1，y_0）所以直线 l 的方程为 $y=x-1+y_0$……2 分

联立方程 $\begin{cases}y^2=4x\\ y=x-1+y_0\end{cases}$ 得：$y^2-4y+4y_0-4=0$……4 分

则 $y_1+y_2=4$　　$\therefore y_1+y_2$ 是定值 4　　……5 分

（2）证：依题意设直线 l_0 的方程为：$x=ny+1$，点 $E(\frac{y_1^2}{4},y_1),Q(\frac{y_2^2}{4},y_2)$，

联立方程 $\begin{cases}y^2=4x\\ x=ny+1\end{cases}$ 得：$y^2-4ny-4=0$， ……6 分

$\therefore y_1\cdot y_2=-4$，即 $y_2=\frac{-4}{y_1}$　……7 分

$\because$ 点 F 坐标为（1,0）$\therefore k_{RF}=-\frac{m}{2}$　……8 分

$$\because k_{RQ}=\frac{y_2-m}{\frac{y_2^2}{4}+1}=\frac{-\frac{4}{y_1}-m}{\frac{4}{y_1^2}+1}=\frac{-4y_1-my_1^2}{4+y_1^2},\cdots\cdots\cdots 9分$$

$$又\ k_{RE}=\frac{y_1-m}{\frac{y_1^2}{4}+1}=\frac{4y_1-4m}{4+y_1^2},\cdots\cdots\cdots 10分$$

$$\therefore k_{RQ}+k_{RE}=\frac{-4y_1-my_1^2}{4+y_1^2}+\frac{4y_1-4m}{4+y_1^2}=-m=2k_{RF}\cdots\cdots\cdots 11分$$

∴直线 RQ、RF、RE 的斜率成等差数列　……12 分

22.（1）由$1-x>0$得$f(x)$的定义域为$(-\infty,1)$　$f'(x)=\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}(x<1)$…1 分

当$0<x<1$时，$f'(x)\geq 0$，$f(x)$单调递增，

当$x\leq 0$时，$f'(x)\leq 0$，$f(x)$单调递减；……3 分

$\therefore f(x)\geq f(0)=0$，即$f(x)\geq 0$恒成立 ……4 分

（2）$F(x)=f(x)+g(x)=-\ln(1-x)+\frac{2}{\pi}\cos(\pi x)$，$F'(x)=\frac{1}{1-x}-2\sin\pi x$，$x\in\left(-\frac{3}{2},1\right)$

① 当$x\in\left(-\frac{3}{2},-1\right]$时，$y=\frac{1}{1-x}$单调递增，$y=2\sin\pi x$单调递减，

所以$F'(x)=\frac{1}{1-x}-2\sin\pi x$在$x\in\left(-\frac{3}{2},-1\right]$上单调递增，又$F'\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{5}-2<0$，

$F'(-1)=\frac{1}{2}-0>0$

所以$x\in\left(-\frac{3}{2},-1\right]$时，$F'(x)$有一变号零点，

即$F(x)$在$x\in\left(-\frac{3}{2},-1\right]$有一个极值点；　……6 分

② 当$x\in(-1,0]$时，$\frac{1}{1-x}>0$，$2\sin\pi x<0$，所以$F'(x)=\frac{1}{1-x}-2\sin\pi x>0$，

$F(x)$在这一区间内无极值点；　……7 分

③ 当$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$时，令$h(x)=F'(x)=\frac{1}{1-x}-2\sin\pi x$，

$$h'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}-2\pi\cos(\pi x)$$

$y=\frac{1}{(1-x)^2}$ 在 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增，$y=2\pi\cos\pi x$ 在 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递减，

所以 $h'(x)$ 在 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增，又 $h'(0)=1-2\pi<0$，

$h'\left(\frac{1}{2}\right)=4>0$ 所以 $\exists x_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 使得 $h'(x)=0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $\left(x_0,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增，

又 $h(0)=1>0,h\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{4}{3}-2\sqrt{2}<0,h\left(\frac{1}{2}\right)=0$，所以 $h(x)$ 在 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 上有两个零点，

所以 $F(x)$ 有两个极值点，……10 分

④当 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时，$\frac{1}{1-x}>2\geq 2\sin\pi x$，$F'(x)>0$，

所以 $F(x)$ 这一区间内无极值点；……11 分

综上，$F(x)=f(x)+g(x)$ 在 $x\in\left(-\frac{3}{2},1\right)$ 上有 3 个极值点. ……12 分