百师联盟2021届高三开年摸底联考 全国卷Ⅰ
文科数学参考答案及评分意见

1. B 【解析】$z+1=-1+i$，$z=-2+i$，所以$|z|=\sqrt{5}$，选B.

2. C 【解析】$M=\{0,1,2\}$，，$M\cap N=\{0,1,2\}$，选C.

3. C 【解析】C

4. D 【解析】两条直线a，b平行不能推出与直线c垂直，反过来，两条直线a，b都垂直直线c，也不能推出两条直线a，b平行，两条直线a，b可能是异面直线选D.

5. B 【解析】对于①$c^2>0$，根据不等式性质得$a<b$，正确；

   对于②，$b=0$不成立，错误；

   对于③可得$0<a^2<b^2$，即$|a|<|b|$，因为$a\leqslant|a|$，不等式成立，正确；

   对于④对数运算公式错误；选B.

6. C 【解析】$\frac{a_6}{a_3}=q^3=27$，$q=3$，$a_3=a_1q^2=9a_1=3$，$a_1=\frac{1}{3}$，$a_5=27$，选C.

7. A 【解析】由图可知，该函数为偶函数，B不对；可考虑$x\geqslant0$的情况，

   $f'(x)=2x+\sin x+x\cos x$，因为$f'(0)=0$，又$x\geqslant-\sin x$，$1+\cos x\geqslant0$

   $f'(x)=x+\sin x+x+x\cos x\geqslant0$. 函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上为增函数，选A.

8. D 【解析】$\overrightarrow{BF}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BE}=\frac{3}{4}(\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b})=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{3}{8}\boldsymbol{b}$，

   $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BC}=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{3}{8}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}-\frac{5}{8}\boldsymbol{b}$，选D.

9. C 【解析】当$n=1$时，$s=[\frac{1+1}{3}]=0$，$k=2$；

   当$n=2$时，$s=[\frac{0+2}{3}]=0$，$k=3$；

   当$n=3$时，$s=[\frac{0+3}{3}]=1$，$k=4$；

   当$n=4$时，$s=[\frac{1+4}{3}]=1$，$k=5$；

   当$n=5$时，$s=[\frac{1+5}{3}]=2$，$k=6$；

   当$n=6$时，$s=[\frac{2+6}{3}]=2$，$k=7$；

   当$n=7$时，$s=[\frac{2+7}{3}]=3$，$k=8$；

当 $n=8$ 时，$s=[\frac{3+8}{3}]=3,k=9$；

当 $n=9$ 时，$s=[\frac{3+9}{3}]=4,k=10$；

选 C.

10. A 【解析】由题意可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，又 $f(1)=0$，

$x<1$ 时，$f(x)<0$；$x>1$ 时，$f(x)>0$；

对于 $(x-2)f(x)>0$，当 $x>2$ 时，不等式成立，

当 $1<x<2$ 时，$x-2<0$，$f(x)>0$，不等式不成立；

当 $x<1$ 时，$x-2<0$，且 $f(x)<0$，

不等式成立不等式的解集 $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ 选 A.

11. A 【解析】$S=2\pi R^2+\pi R^2+2\pi rh$，$R=2$，$r=1$，$h=3$，$S=18\pi$，选 A.

12. A 【解析】设双曲线的左焦点为 F_1，连接 AF_1，CF_1，可知 $\angle F_1AC=90°$，设 $|AF|=m$，$|FC|=3m$，$|AF_1|=2a+m$，$|F_1C|=2a+3m$，$(2a+m)^2+(4m)^2=(2a+3m)^2$，解得 $m=a$，$(3a)^2+a^2=4c^2$，$e=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 选 A.

13. $\frac{1}{2}$ 【解析】记事件 $A=\{$第一次取到的是 130 分以上试卷$\}$，事件 $B=\{$第二次取到的是 90 以下试卷$\}$.

由题意可得事件 B 发生所包含的基本事件数 $n(A\cap B)=3\times2=6$，

事件 A 发生所包含的基本事件数 $n(A)=3\times4=12$，

所以 $P(B|A)=\frac{1}{2}$.

14. $f(x)=2\sin(\frac{\pi}{3}x+\frac{2\pi}{3})$ 【解析】函数的最小正周期为 $T=6$，$6=\frac{2\pi}{\omega}$，$\omega=\frac{\pi}{3}$，$f(x)=2\sin(\frac{\pi}{3}x+\varphi)$

$P(-\frac{1}{2},2)$ 在图象上且是最高点，

所以 $\frac{\pi}{3}(-\frac{1}{2})+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，$\varphi=2k\pi+\frac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$.

$f(x)=2\sin(\frac{\pi}{3}x+\frac{2\pi}{3})$.

15. 18 【解析】$S_2=3a_1+2=5$，$a_2=4$，$S_3=3a_2+2=14$，$a_3=9$，

$S_4=3a_3+2=29, a_4=15, S_5=3\times15+2=47, a_5=18.$

16. $\frac{1}{e-1}<m<1$ 【解析】$f'(x)=m-\frac{1}{x}=\frac{mx-1}{x^2}$,

(1)当 $m\leqslant0$ 时,在区间$(1,e)$内,$f'(x)<0$,$f(x)$在区间$(1,e)$内单调递减,只要满足:

$\begin{cases}f(1)>0\\f(e)<0\end{cases}$, $\begin{cases}0>0\\m<\frac{1}{e-1}\end{cases}$,矛盾

(2)当 $m>0$ 时,$f'(x)=0$,$x=\frac{1}{m}$,

若 $1<\frac{1}{m}<e$,即$\frac{1}{e}<m<1$ 时,$f(x)$在$(1,\frac{1}{m})$单调递减,在区间$(\frac{1}{m},e)$单调递增;

只要$\begin{cases}f(e)>0\\f(\frac{1}{m})\leqslant0\end{cases}$,所以$\begin{cases}m>\frac{1}{e-1}\\1+\ln m-m\leqslant0,\\\frac{1}{e}<m<1\end{cases}$

令 $h(m)=1+\ln m-m$,$h'(m)=\frac{1}{m}-1>0$,$h(m)_{\max}<h(1)=0$,

当$\frac{1}{e-1}<m<1$ 时,$1+\ln m-m\leqslant0$ 恒成立,

所以,$\frac{1}{e-1}<m<1$.

17.【解析】(1)$5\cos(B+C)+2=2\cos^2A-1$,$2\cos^2A+5\cos A-3=0$,

$\cos A=\frac{1}{2}$或 $\cos A=-3$(舍去). ………………………… 4 分

$0<A<\pi$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 5 分

(2)$S=\frac{3}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}$,$bc=6$,

$c=\sqrt{3}$,$b=2\sqrt{3}$, ………………………… 8 分

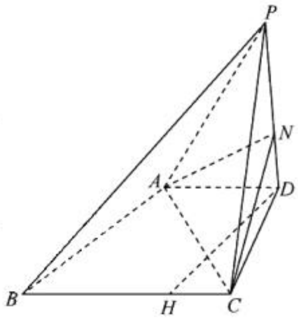
有余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-bc=12+3-6=9$,$a=3$,

由正弦定理得$\triangle ABC$ 外接圆直径 $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$, ………………………… 10 分

$(2R)^2\sin B\sin C=6$,所以 $\sin B\sin C=\frac{1}{2}$. ………………………… 12 分

18. **解析**:(1)证明:因为 $AD//BC,BC=4=2AD$,

$\triangle ADM\sim\triangle BCM,BM=2MD,PN=2ND$,连接 $MN,MN//PB$. …………………………………………… 3 分



又 $MN\subset$平面 $ACN,PB\not\subset$平面 ACN,

所以 $PB//$平面 ACN. …………………………………… 5 分

(2)过 D 作 $DH\perp BC$ 于 H,因为 $AD//BC$,, $\angle ADC=120°$,所以

$\angle DCB=60°,DH=\sqrt{3},S_{\Delta DBC}=2\sqrt{3}$. …………………………………… 8 分

设三棱锥 $D-PBC$ 的高为 h,三棱锥 $N-PBC$ 的高为 h_1,则$\dfrac{V_{N-PBC}}{V_{D-PBC}}=\dfrac{h_1}{h}=\dfrac{PN}{PD}=\dfrac{2}{3}$

$V_{D-PBC}=V_{P-DBC},V_{P-DBC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle DBC}\times PD$,

$V_{P-DBC}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. …………………………………… 10 分

$V_{N-PBC}=\dfrac{2}{3}V_{D-PBC}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$. …………………………………… 12 分

19.【**解析**】(1)共有 100 名文科学生参加考试,其中语文考试成绩低于 130 的占 95%,语文成绩特别优秀的概率为 $P_1=1-0.95=0.05$,语文特别优秀的同学有 $100\times0.05=5$ 人, … 3 分

数学成绩特别优秀的概率为 $P_2=0.002\times20=0.04$,

数学特别优秀的同学有 $100\times0.04=4$ 人. …………………………………… 5 分

$\bar{x}=0.14\times60+0.36\times80+0.4\times100+0.06\times120+0.04\times140=90$ 分. ………………… 6 分

(2)2×2 列联表:

	语文特别优秀	语文不特别优秀	合计
数学特别优秀	3	1	4
数学不特别优秀	2	94	96
合计	5	95	100

所以 $K^2=\dfrac{100\ (3\times94-1\times2)^2}{4\times96\times5\times95}\approx42.982>6.635$. …………………………………… 10 分

所以有 99% 的把握认为语文特别优秀的同学,数学也特别优秀. ……………………… 12 分

20.【**解析**】(1)$f'(x)=ae^x+\cos x+1$, …………………………………… 2 分

因为 $x\in[0,\pi]$,所以 $1+\cos x\geqslant0$,

当 $a=-1$ 时,$f'(x)=-e^x+\cos x+1$, …………………………………… 3 分

令 $g(x)=-e^{x}+\cos x+1, g'(x)=-e^{x}-\sin x<0$,

$g(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上单调递减; $g(0)=-1+2=1, g(\pi)=-e^{\pi}<0$, …………………… 5分

存在 $x_0\in(0,\pi)$, 使得 $f'(x_0)=0$,

所以函数 $f(x)$ 递增是区间 $[0,x_0]$, 递减区间是 $[x_0,\pi]$,

所以函数 $f(x)$ 存在唯一的极大值 $f(x_0)$. …………………………………………………… 6分

(2)由 $f(x)<2x-1$, 即令

$h(x)=ae^{x}+\sin x-x+1<0, h'(x)=ae^{x}+\cos x-1<0$, ………………………………… 9分

当 $a<0$ 时,

$h(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上是单调减函数, …………………………………………………… 10分

$h(x)\leqslant h(0)=a+1$, 只要 $a+1<0$ 即可, 即 $a<-1$. ………………………………… 12分

21.【解析】(1) $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times 2b=1, b=1, a^2-c^2=1$,

设 $M(x,y)$ 是椭圆上任意一点, $F(-c,0)$, $MF^2=(x+c)^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}x^2+2cx+a^2$,

对称轴 $x=-\frac{a^2}{c}<-a$, 区间 $x\in[-a,a]$ 为增区间, $x=-a$ 时, $MF_{\min}=a-c$, 即

$a-c=\sqrt{2}-1$, …………………………………………………………………………… 3分

$a+c=\sqrt{2}+1, a=\sqrt{2}$, ……………………………………………………………… 4分

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. …………………………………………………………… 5分

(2)设 $P(t,2), M(x_1,y_1), N(x_1,y_1)$, $\begin{cases} k_{AP}=\frac{y_1-1}{x_1}=\frac{1}{t} \\ k_{BP}=\frac{y_2+1}{x_2}=\frac{3}{t} \end{cases}$,

所以有 $3x_2(y_1-1)=x_1(y_2+1)$, ………………………………………………………… 7分

因为 $\frac{x_1^2}{2}=1-y_1^2=(1-y_1)(1+y_1)$, 代入上式得

$\frac{-3}{2}x_1x_2=(y_1+1)(y_2+1)$, $\frac{-3}{2}x_1x_2=y_1y_2+(y_1+y_2)+1$ ①

设直线 $MN: y=kx+m$, 代入 $x^2+2y^2=2$, $(1+2k^2)y^2-2my+m^2-2k^2=0$.

$\begin{cases} y_1+y_2=\frac{2m}{1+2k^2} \\ y_1y_2=\frac{m^2-2k^2}{1+2k^2} \end{cases}$, ② …………………………………………………………… 10分

$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0, x_1x_2=\dfrac{2m^2-2}{1+2k^2}$ ③ ………………………… 11 分

将②③代入①得 $2m^2+m-1=0, m=\dfrac{1}{2}$ 或 -1（舍去）

直线 MN 过定点$(0,\dfrac{1}{2})$. ………………………… 12 分

22.【解析】(1)直线 l 普通方程为 $y=2x-1$, ………………………… 4 分

(2)曲线 C 的普通方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$,将直线 l 的参数方程

化为$\begin{cases} x=2+\dfrac{1}{\sqrt{5}}t \\ y=3+\dfrac{2}{\sqrt{5}}t \end{cases}$,($t$ 为参数) ………………………… 6 分

代入椭圆方程得:$\dfrac{17}{5}t^2+\dfrac{52}{\sqrt{5}}t+36=0$,

$t_1+t_2=-\dfrac{52\times5}{17\sqrt{5}}, t_1t_2=\dfrac{36\times5}{17}$. ………………………… 8 分

$t_1t_2>0$,t_1,t_2 同号,$|AP|+|AQ|=|t_1+t_2|=\dfrac{52\sqrt{5}}{17}$. ………………………… 10 分

23.【解析】(1)当 $a=4$ 时,$f(x)=|3x-4|+x$

由 $|3x-4|<3-x$,得 $x-3<3x-4<3-x$,

解得$\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{7}{4}$

所以,不等式$f(x)<3$ 的解集为$\{x|\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{7}{4}\}$. ………………………… 4 分

(2)$f(x)+g(x)=|3x-a|+\left|x+\dfrac{6}{a}\right|=\left|3(x-\dfrac{a}{3})\right|+\left|x+\dfrac{6}{a}\right|$

$=2\left|x-\dfrac{a}{3}\right|+\left|x-\dfrac{a}{3}\right|+\left|x+\dfrac{6}{a}\right|$

$\geqslant\left|x-\dfrac{a}{3}\right|+\left|x+\dfrac{6}{a}\right|$(当且仅当 $x=\dfrac{a}{3}$时取等号). ………………………… 7 分

$\geqslant\left|(x-\dfrac{a}{3})-(x+\dfrac{6}{a})\right|$(当且仅当$(x-\dfrac{a}{3})(x+\dfrac{6}{a})\leqslant0$ 时取等号,$a>0$)

$=\left|\dfrac{a}{3}+\dfrac{6}{a}\right|\geqslant2\sqrt{2}$当且仅当 $a=3\sqrt{2}$时,等号成立. ………………………… 10 分

太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 “ 专业、专注、有态度 ” 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。