

2023 届南宁市第二中学考前模拟大演练 理科数学试卷答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	A	D	C	C	C	A	D	C	B	A	A

9 【详解】将该多面体放入正方体中，如图所示.

由于多面体的棱长为1，所以正方体的棱长为 $\sqrt{2}$

因为该多面体是由棱长为 $\sqrt{2}$ 的正方体连接各棱中点所得，

所以该多面体外接球的球心为正方体体对角线的中点，其外接球直径等于正方体的面对角线长，即
 $2R = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$

所以 $R=1$ $S = 4\pi R^2 = 4\pi$ 答案 C

10 【答案】 B

【详解】如图，设 $F_2M \perp PF_1$ 于 M ，

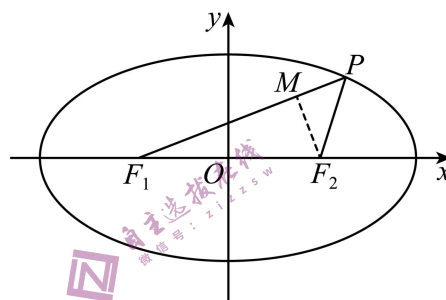
则由题意得 $|F_2M| = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ， $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ ，

$\therefore |PM| = \frac{1}{3}a$ ， $|PF_2| = \frac{2}{3}a$ ，

由椭圆定义可得 $|PF_1| + |PF_2| = |PM| + |MF_1| + |PF_2| = 2a$ ，

$\therefore |MF_1| = a$ ，在 $\text{Rt}\triangle MF_1F_2$ 中，由勾股定理得 $a^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = 4c^2$ ，

可得 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选: B



12 原方程可以化成 $\frac{ex^2}{e^x} = a + \frac{\ln y}{y}$ ，取 $f(x) = \frac{ex^2}{e^x}$ ， $x \in [-1, 4]$ ， $g(x) = a + \frac{\ln x}{x}$ ， $x \in [1, e]$ 。

$$f'(x) = \frac{e(2x - x^2)}{e^x}, x \in [-1, 4],$$

当 $x \in (-1, 0)$ 时， $f'(x) < 0$ ，故 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上为减函数；

当 $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上为增函数;

当 $x \in (2, 4)$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $[2, 4]$ 上为增函数;

$$f(x)_{\text{极小值}} = f(0) = 0, \quad f(x)_{\text{极大值}} = f(2) = \frac{4}{e}, \quad f(-1) = e^2, \quad f(4) = \frac{16}{e^3},$$

$g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, x \in (1, e)$, 故 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $[1, e]$ 上为增函数.

因为关于 x 的方程 $\frac{ex^2}{e^x} = a + \frac{\ln y}{y}$ 在 $[-1, 4]$ 有三个不同的实数根, 故

$$\begin{cases} g(1) \geq f(4) \\ g(e) < f(2) \end{cases}, \text{ 故 } \begin{cases} a \geq \frac{16}{e^3} \\ a + \frac{1}{e} < \frac{4}{e} \end{cases}, \text{ 解答 } \frac{16}{e^3} \leq a < \frac{3}{e}, \text{ 故选 A.}$$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 120$, 则 $2a_6 - a_9 =$ _____

答案 24

14 已知向量 a, b 夹角为 60° , 且 $|a| = 1, |2a - b| = 2\sqrt{3}$, 则 $|b| =$ _____

解析: $\because a, b$ 的夹角为 $60^\circ, |a| = 1,$

$$\therefore a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} |b|,$$

$$\therefore |2a - b|^2 = 4 - 4 \times \frac{1}{2} |b| + |b|^2 = 12.$$

$$\therefore |b| = 4.$$

答案: 4

15 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, O 为底面 $ABCD$ 的中心, M 为线段 CC_1 上的动点 (不与两个端点重合), P 为线段 BM 的中点, 则以下正确的是 _____

- (1). 直线 DP 与 OM 是异面直线 (2). 三棱锥 $B_1 - DBM$ 的体积是定值
(3). 存在点 M , 使 $AC_1 \parallel$ 平面 BDM (4) 存在点 M , 使 $A_1C \perp$ 平面 BDM

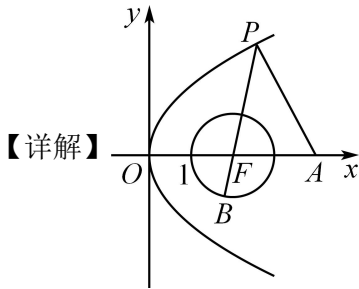
答案 (2) (3)

16. 已知点 $A(4, 0)$, 点 P 在抛物线 $\Gamma: y^2 = 8x$ 上运动, F 是抛物线 Γ 的焦点, 连接 PF 并延长与圆

$C:(x-2)^2+y^2=1$ 交于点 B , 则 $\frac{|PA|^2}{|PB|}$ 的最小值是_____.

【答案】4

【分析】求出焦点 $F(2,0)$, 设 $P(x,y)$. 表示出 $\frac{|PA|^2}{|PB|} = \frac{x^2+16}{x+3}$, 令 $x+3=t$, 换元根据基本不等式即可求出答案.



由题意可知, 抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 $F(2,0)$.

设点 $P(x,y)$, 则由抛物线的定义得 $|PF| = x+2$, $|PA|^2 = (x-4)^2 + y^2 = x^2 - 8x + 16 + 8x = x^2 + 16$.

要使 $\frac{|PA|^2}{|PB|}$ 最小, 则应有 $|PB| = |PF| + 1 = x + 3$,

此时有 $\frac{|PA|^2}{|PB|} = \frac{x^2 + 16}{x + 3}$.

令 $x+3=t$, 则 $x=t-3$,

$\frac{|PA|^2}{|PB|} = \frac{(t-3)^2 + 16}{t} = \frac{t^2 - 6t + 25}{t} = t + \frac{25}{t} - 6$,

因为 $\frac{|PA|^2}{|PB|} > 0$, 显然有 $t > 0$,

则由基本不等式知 $t + \frac{25}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{25}{t}} = 10$, 当且仅当 $t = \frac{25}{t}$, 即 $t = 5$ 时等号成立.

故 $\frac{|PA|^2}{|PB|}$ 的最小值为 $10 - 6 = 4$.

故答案为: 4.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4 = 4$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_{10} = 55$, 数列 $\{b_n\}$ 满足

$$\log_2 b_1 + \log_2 b_2 + \cdots + \log_2 b_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式; (II) 求数列 $\{(-1)^n a_n b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

$$(1) a_1 + 3d = 1, 10a_1 + 45d = 55, a_n = n$$

$$\log_2 b_1 + \log_2 b_2 + \cdots + \log_2 b_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } \log_2 b_1 + \log_2 b_2 + \cdots + \log_2 b_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (2)$$

$$(1) - (2) \text{ 得 } \log_2 b_n = n, \text{ 得 } b_n = 2^n$$

当 $n=1$ 时 $\log_2 b_1 = 1$, 则 $b_1 = 2$ 满足上述式子 所以 $b_n = 2^n$ -----6 分

$$(2) c_n = (-1)^n a_n b_n = n(-2)^n$$

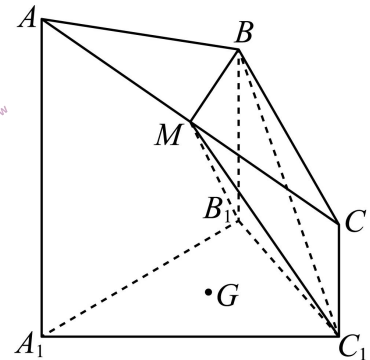
$$T_n = (-2)^1 + 2 \cdot (-2)^2 + \cdots + n \cdot (-2)^n$$

$$-2T_2 = (-2)^2 + 2 \cdot (-2)^3 + \cdots + (n-1) \cdot (-2)^n + n \cdot (-2)^{n+1}$$

$$3T_n = (-2)^1 + (-2)^2 + \cdots + (-2)^n - n(-2)^{n+1}$$

$$T_n = \frac{-2 - (3n+1)(-2)^{n+1}}{9} \text{ -----12 分}$$

18. 如图, 在多面体 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 // BB_1 // CC_1$, $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, $\triangle A_1B_1C_1$ 为等边三角形, $A_1B_1 = BB_1 = 2$, $AA_1 = 3$, $CC_1 = 1$, 点 M 是 AC 的中点.



(1) 若点 G 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的重心, 证明: 点 G 在平面 BB_1M 内;

(2) 求二面角 $B_1 - BM - C_1$ 的正切值.

证明: 取 A_1C_1 中点 N , 连接 B_1N , MN , 如图所示,

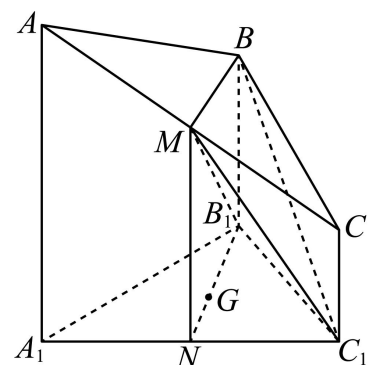
因为点 G 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的重心,

故 G 一定在中线 B_1N 上,

因为点 M 是 AC 的中点, 点 N 是 A_1C_1 的中点,

所以 MN 是梯形 AA_1C_1C 的中位线,

所以 $MN = \frac{1}{2}(AA_1 + CC_1) = 2 = BB_1$, 且 $MN // AA_1 // CC_1$,



又 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ ，所以 $MN \parallel BB_1$ ，

所以四边形 BB_1NM 是平行四边形，因为点 $G \in B_1N$ ， $B_1N \subset$ 平面 BB_1NM ，

所以点 $G \in$ 平面 BB_1NM ，即点 G 在平面 BB_1M 内。-----5 分

(2) 以 A_1 为原点， A_1B_1 所在直线为 x 轴，垂直于 A_1B_1 的直线为 y 轴， A_1A 所在直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $B_1(2,0,0)$ ， $B(2,0,2)$ ， $C_1(1,\sqrt{3},0)$ ， $M\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)$ ，

$$\overrightarrow{MB_1} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -2\right), \overrightarrow{MB} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \overrightarrow{MC_1} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -2\right),$$

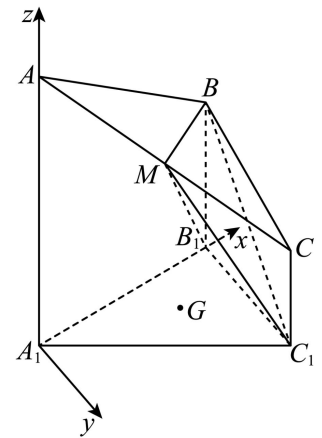
设平面 BMB_1 与平面 BMC_1 的法向量分别为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ ， $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$ ，

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 - 2z_1 = 0 \\ \frac{3}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 = 0 \end{cases}, \text{不妨取 } x_1 = 1, \text{则 } \vec{m} = (1, \sqrt{3}, 0),$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_2 = 0 \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2 - 2z_2 = 0 \end{cases}, \text{不妨取 } x_2 = 1, \vec{n} = (1, \sqrt{3}, 1),$$

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

故二面角 $B_1 - BM - C_1$ 的正切值为 $\frac{1}{2}$ 。-----12 分



19 为响应党中央“扶贫攻坚”的号召，某企业指导一贫困村通过种植紫甘薯并通过网络直播来提高经济收入.紫甘薯对环境温度要求较高，根据科学种植经验，随着温度的升高，其死亡株数成增长的趋势.下表给出了一号实验田紫甘薯在温度升高时 6 组死亡的株数.

温度 $x/^\circ\text{C}$	21	23	24	27	29	30
死亡数 y /株	6	11	20	27	57	77

经计算, $\bar{x} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i = 26$, $\bar{y} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 y_i = 33$, $\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = 588$, $\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = 84$,

$\sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2 = 3930$, $\sum_{i=1}^6 (y_i - \hat{y}_i)^2 = 393$, $e^{8.071} \approx 3200$, 其中 x_i , y_i 分别为试验数据中的温度和死亡株数, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

(1) 若用一元线性回归模型, 求 y 关于 x 的经验回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$;

(2) 若用非线性回归模型求得 y 关于 x 的非线性经验回归方程 $\hat{y} = 0.06e^{0.2306x}$, 且相关指数为 $R^2 = 0.9432$.

(i) 试与 (1) 中的回归模型相比, 用 R^2 说明哪种模型的拟合效果更好;

(ii) 用拟合效果好的模型预测温度为 35°C 时该批紫甘薯的死亡株数 (结果取整数).

附: 对于一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 其回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别

为: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$; 相关指数为: $R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$.

【解析】(1) 由题意可知 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{588}{84} = 7$,

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 33 - 7 \times 26 = -149$,

$\therefore y$ 关于 x 的线性回归方程是 $\hat{y} = 7x - 149$; -----5 分

(2) ① 用指数回归模型拟合 y 与 x 的关系, 相关指数 $R^2 \approx 0.9432$,

线性回归模型拟合 y 与 x 的关系, 相关指数

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^6 (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{393}{3930} = 0.9$$

则 $0.9 < 0.9432$,

\therefore 用 $\hat{y} = 0.06e^{0.2306x}$ 比 $\hat{y} = 7x - 149$ 拟合效果更好; -----9 分

② $\hat{y} = 0.06e^{0.2306x}$ 中, 令 $x = 35$,

则 $\hat{y} = 0.06e^{0.2306 \times 35} = 0.06e^{8.071} \approx 0.06 \times 3200 \approx 192$,

故预测温度为 35°C 时该紫甘薯死亡株数约为 192 株. -----12 分

20. 抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上的点 $M(1, y_0)$ 到抛物线 C 的焦点 F 的距离为 2, A, B (不与 O 重合) 是抛物线 C 上两个动点, 且 $OA \perp OB$.

(1) 求抛物线 C 的标准方程;

(2) x 轴上是否存在点 P 使得 $\angle APB = 2\angle APO$? 若存在, 求出点 P 的坐标, 若不存在, 说明理由.

【详解】(1) 由抛物线的定义得 $|MF| = 1 + \frac{p}{2} = 2$, 解得 $p = 2$,

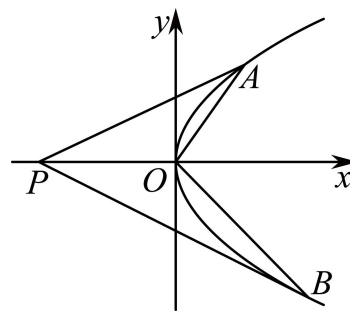
则抛物线 C 的标准方程为 $y^2 = 4x$. -----4 分

(2) 依题意知直线 OA 与直线 OB 的斜率存在, 设直线 OA 方程为 $y = kx (k \neq 0)$,

由 $OA \perp OB$ 得直线 OB 方程为: $y = -\frac{1}{k}x$,

$$\begin{cases} y = kx \\ y^2 = 4x \end{cases}, \text{ 解得 } A\left(\frac{4}{k^2}, \frac{4}{k}\right),$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{k}x \\ y^2 = 4x \end{cases}, \text{ 解得 } B(4k^2, -4k)$$



由 $\angle APB = 2\angle APO$ 得 $\angle OPA = \angle OPB$, 假定在 x 轴上存在点 P 使得 $\angle OPA = \angle OPB$, 设点 $P(x_0, 0)$,

$$\text{则由 (1) 得直线 } PA \text{ 斜率 } k_{PA} = \frac{\frac{4}{k}}{\frac{4}{k^2} - x_0} = \frac{4k}{4 - k^2x_0}, \text{ 直线 } PB \text{ 斜率 } k_{PB} = \frac{-4k}{4k^2 - x_0},$$

$$\text{由 } \angle OPA = \angle OPB \text{ 得 } k_{PA} + k_{PB} = 0, \text{ 则有 } \frac{4k}{4 - k^2x_0} = \frac{4k}{4k^2 - x_0}, \text{ 即 } 4 - k^2x_0 = 4k^2 - x_0,$$

$$\text{整理得 } (k^2 - 1)(x_0 + 4) = 0,$$

显然当 $x_0 = -4$ 时, 对任意不为 0 的实数 k , $(k^2 - 1)(x_0 + 4) = 0$ 恒成立,

即当 $x_0 = -4$ 时, $k_{PA} + k_{PB} = 0$ 恒成立, $\angle OPA = \angle OPB$ 恒成立,

所以 x 轴上存在点 $P(-4, 0)$ 使得 $\angle APB = 2\angle APO$. -----12 分

21. 设函数 $f(x) = e^{2x}, g(x) = kx + 1 (k \in R)$.

(1) 若直线 $y = g(x)$ 和函数 $y = f(x)$ 的图象相切, 求 k 的值;

(2) 当 $k > 0$ 时, 若存在正实数 m , 使对任意 $x \in (0, m)$ 都有 $|f(x) - g(x)| > 2x$ 恒成立, 求 k 的取值范围.

【答案】 (I) $k = 2$; (II) $(4, +\infty)$.

(1) 设切点的坐标为 (t, e^{2t}) , 由 $f(x) = e^{2x}$, 得 $f'(x) = 2e^{2x}$,

所以切线方程为 $y - e^{2t} = 2e^{2t}(x - t)$, 即 $y = 2e^{2t}x + (1 - 2t)e^{2t}$,

由已知 $y = 2e^{2x}x + (1 - 2t)e^{2x}$ 和 $y = kx + 1$ 为同一条直线, 所以 $2e^{2t} = k, (1 - 2t)e^{2t} = 1$,

令 $h(x) = (1 - x)e^x$, 则 $h'(x) = -xe^x$,

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 单调递增, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 单调递减,

所以 $h(x) \leq h(0) = 1$,

当且仅当 $x = 0$ 时等号成立, 所以 $t = 0, k = 2$. 5分

(2) ① 当 $k > 2$ 时, 有 (1) 结合函数的图象知:

存在 $x_0 > 0$, 使得对于任意 $x \in (0, x_0)$, 都有 $f(x) < g(x)$,

则不等式 $|f(x) - g(x)| > 2x$ 等价 $g(x) - f(x) > 2x$, 即 $(k - 2)x + 1 - e^{2x} > 0$,

设 $t = (k - 2)x + 1 - e^{2x}, t' = (k - 2) - 2e^{2x}$,

由 $t' > 0$ 得 $x < \frac{1}{2} \ln \frac{k - 2}{2}$, 由 $t' < 0$ 得 $x > \frac{1}{2} \ln \frac{k - 2}{2}$,

若 $2 < k \leq 4, \frac{1}{2} \ln \frac{k - 2}{2} \leq 0$, 因为 $(0, x_0) \subseteq \left(-\infty, \frac{1}{2} \ln \frac{k - 2}{2}\right)$, 所以 $t(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2} \ln \frac{k - 2}{2}\right)$ 上单调递减,

因为 $t(0) = 0$,

所以任意 $x \in \left(0, \frac{1}{2} \ln \frac{k - 2}{2}\right), t(x) > 0$, 与题意不符,

若 $k > 4$, $\frac{1}{2} \ln \frac{k-2}{2} > 0$, $\left(0, \frac{1}{2} \ln \frac{k-2}{2}\right) \subseteq \left(-\infty, \frac{1}{2} \ln \frac{k-2}{2}\right)$, 所以 $t(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2} \ln \frac{k-2}{2}\right)$ 上单调递增,

因为 $t(0) = 0$, 所以对任意 $x \in \left(0, \frac{1}{2} \ln \frac{k-2}{2}\right)$, $t(x) > 0$ 符合题意,

此时取 $0 < m \leq \min\left\{0, \frac{1}{2} \ln \frac{k-2}{2}\right\}$, 可得对任意 $x \in (0, m)$, 都有 $|f(x) - g(x)| > 2x$.

②当 $0 < k \leq 2$ 时, 有 (1) 结合函数的图象知 $e^{2x} - (2x+1) \geq 0 (x > 0)$,

所以 $f(x) - g(x) = e^{2x} - kx - 1 = e^{2x} - (2x+1) + (2-k)x \geq (2-k)x \geq 0$ 对任意 $x > 0$ 都成立,

所以 $|f(x) - g(x)| > 2x$ 等价于 $e^{2x} - (k+2)x - 1 > 0$,

设 $\varphi(x) = e^{2x} - (k+2)x - 1$, 则 $\varphi'(x) = 2e^{2x} - (k+2)$,

由 $\varphi'(x) > 0$ 得 $x > \frac{1}{2} \ln \frac{k+2}{2}$, $\varphi'(x) < 0$ 得, $x < \frac{1}{2} \ln \frac{k+2}{2}$,

所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2} \ln \frac{k-2}{2}\right)$ 上单调递减, 注意到 $\varphi(0) = 0$,

所以对任意 $x \in \left(0, \frac{1}{2} \ln \frac{k-2}{2}\right)$, $\varphi(x) < 0$, 不符合题设,

总数所述, k 的取值范围为 $(4, +\infty)$. -----12 分

22 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{4t}{1+t^2} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$
 以坐标原点 O 为极点, x

轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho \cos \theta + \sqrt{3}\rho \sin \theta + 11 = 0$.

(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程; (2) 求 C 上的点到 l 距离的最小值.

(1) 因为 $-1 < \frac{1-t^2}{1+t^2} \leq 1$, 且 $x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = 1$,

所以 C 的直角坐标方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 (x \neq -1)$.

$$\rho \cos \theta = x, \rho \sin \theta = y$$

l 的直角坐标方程为 $2x + \sqrt{3}y + 11 = 0$.-----5 分

(2) 由 (1) 可设 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \alpha, \\ y = 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数, $-\pi < \alpha < \pi$).

$$C \text{ 上的点到 } l \text{ 的距离为 } \frac{|2 \cos \alpha + 2\sqrt{3} \sin \alpha + 11|}{\sqrt{7}} = \frac{4 \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) + 11}{\sqrt{7}}.$$

当 $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$ 时, $4 \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) + 11$ 取得最小值 7,

故 C 上的点到 l 距离的最小值为 $\sqrt{7}$.-----10 分

23 已知函数 $f(x) = |x+2| - m|x+1|$.

(1) 若 $m = -2$, 求不等式 $f(x) \geq 8$ 的解集;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq m|x+3|$ 对于任意实数 x 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

解: (1) 当 $m = -2$ 时, $f(x) = \begin{cases} -3x-4, & x \leq -2, \\ -x, & -2 < x < -1, \\ 3x+4, & x \geq -1, \end{cases}$ 当 $x \leq -2$ 时, $-3x-4 \geq 8$, 解得 $x \leq -4$;

当 $-2 < x < -1$ 时, 不等式无解;

当 $x \geq -1$ 时, $3x+4 \geq 8$, 解得 $x \geq \frac{4}{3}$.

综上, 不等式的解集为 $(-\infty, -4] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty \right)$.-----5 分

(2) 由题意知, $|x+2| \leq m(|x+1| + |x+3|)$, 所以 $m \geq \frac{|x+2|}{|x+1| + |x+3|}$. 记 $g(x) = \frac{|x+2|}{|x+1| + |x+3|}$,

则 $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty), \\ \frac{|x+2|}{2}, & x \in (-3, -1), \end{cases}$ 当 $-3 < x < -1$ 时, $g(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2} & (-2 \leq x < -1) \\ \frac{-x-2}{2} & (-3 < x < -2) \end{cases}$,

则 $g(x) < \frac{1}{2}$, 又当 $x = -2$ 时, $g(x)_{\min} = 0$, 所以 $g(x) \in \left[0, \frac{1}{2} \right]$,

所以 $m \geq \frac{1}{2}$, 所以实数 m 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$.-----10 分