

秘密★启用前

2023年省际名校联考一(启航卷) 数学参考答案及评分说明

评分说明:

1. 考生如按其他方法或步骤解答,正确的,同样给分;有错的,根据错误的性质,参照评分说明中相应的规定评分.
2. 计算题只有最后答案而无演算过程的,不给分;只写出一般公式但未能与试题所给的具体条件联系的,不给分.

A卷选择题答案

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. C 2. B 3. B 4. C 5. B 6. D 7. A 8. A

二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分。

9. AC 10. BCD 11. ABD 12. AD

B卷选择题答案

1. A 2. D 3. C 4. C 5. B 6. B 7. A 8. B 9. AD 10. BCD 11. ABC 12. BD

AB卷非选择题答案

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. -8

$$14. \begin{cases} 4, & n=1, \\ \begin{cases} 2n+1, \\ 2n-1 \end{cases}, & n>1. \end{cases}$$

15. $\sqrt{3}$

16. $[-e, +\infty)$

四、解答题:本题共6小题,共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解:(1) $\because a_{n+1}^2 = a_n a_{n+1} + 2a_n^2,$

$$\therefore (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - 2a_n) = 0.$$

$$\text{又} \because a_n > 0, \therefore a_{n+1} - 2a_n = 0, \text{即} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2,$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是公比为2的等比数列. 2分

又 $\because 3a_1, a_2 + 3, a_3$ 成等差数列,

$$\therefore 3a_1 + a_3 = 2(a_2 + 3), \text{即} 3a_1 + 4a_1 = 4a_1 + 6, \text{解得} a_1 = 2. \dots\dots\dots 4分$$

$$\therefore a_n = 2^n. \dots\dots\dots 5分$$

(2) 由(1)可知 $a_n = 2^n$,

$$\therefore b_n = \begin{cases} 2^n, & n \text{ 为奇数}, \\ -n, & n \text{ 为偶数}. \end{cases} \dots\dots\dots 6分$$

$$\therefore T_{2n} = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{2n} = (b_1 + b_3 + \dots + b_{2n-1}) + (b_2 + b_4 + \dots + b_{2n}) \dots\dots\dots 7分$$

$$= 2^1 + 2^3 + \dots + 2^{2n-1} - (2 + 4 + \dots + 2n)$$

$$= \frac{2 - 2^{2n+1} \cdot 2^2}{1 - 4} - \frac{(2 + 2n)n}{2} \dots\dots\dots 9分$$

$$= \frac{2^{2n+1} - 2}{3} - n(n+1). \dots\dots\dots 10分$$



18. 解: (1) 由图象可得 $f(x)$ 的最小正周期 $T = 4(\frac{7}{12}\pi - \frac{\pi}{3}) = \pi \therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$,

由 $2\frac{7\pi}{12} + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 解得 $\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

又因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 得 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, $\therefore f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 3分

由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 解得 $k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$, 5分

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}] (k \in \mathbb{Z})$ 6分

(2) $f(x)f(x - \frac{\pi}{6}) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3}) \cdot 2\sin 2x = 4(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x) \cdot \sin 2x = 2\sin^2 2x + 2\sqrt{3}\sin 2x \cos 2x$

$= \sqrt{3}\sin 4x - \cos 4x + 1 = 2\sin(4x - \frac{\pi}{6}) + 1$ 8分

由 $|f(x)f(x - \frac{\pi}{6}) - 1| \leq 1$ 得 $|2\sin(4x - \frac{\pi}{6})| \leq 1, \frac{1}{2} \leq \sin(4x - \frac{\pi}{6}) \leq \frac{1}{2}$ 10分

$\therefore x \in [t, \frac{\pi}{3}]$, $\therefore 4t - \frac{\pi}{6} \leq 4x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}, \therefore \frac{5\pi}{6} \leq 4t - \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}$, 解得 $\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{\pi}{3}$.

所以实数 t 的取值范围为 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ 12分

19. 解: 过 C 作 $CD \perp AB$, 垂足为 D , $\therefore PO \perp$ 底面 ABC , $PO \subset$ 平面 PAB ,

$\therefore$ 平面 $PAB \perp$ 平面 ABC ,

$\therefore CD \perp$ 平面 PAB ,

$\therefore \angle CPD$ 为直线 PC 与平面 PAB 所成的角, 即 $\angle CPD = 30^\circ$.

$\therefore CD = 1$, 点 D 与点 O 重合, 即 $CO \perp AB$ 3分

以 O 为原点, OC, OB, OP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $C(1, 0, 0), B(0, 1, 0), P(0, 0, \sqrt{3}), A(0, -1, 0), \overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$.

(1) 设 $\overrightarrow{PN} = \lambda \overrightarrow{PC}$, 则 $\overrightarrow{AN} = (0, 1, \lambda\sqrt{3}), \overrightarrow{PB} = (0, 1, -\sqrt{3}), \overrightarrow{PC} = (1, 0, -\sqrt{3})$,

故 $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PN} = (0, 1, \lambda\sqrt{3} - \sqrt{3})$ 5分

$\because PB \perp$ 平面 $AMN, \therefore PB \perp \overrightarrow{AN}$, 即 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$, 解得 $\lambda = \frac{2}{3}$, 所以 $\frac{PN}{NC} = 2$ 6分

(2) $\because PB \perp$ 平面 $AMN, \therefore \overrightarrow{PB}$ 是平面 AMN 的一个法向量. 设平面 PAC 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 7分

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} y + \sqrt{3}z = 0, \\ x + y = 0. \end{cases}$ 取 $\mathbf{n} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -1)$, 9分

则 $\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{PB} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\mathbf{n}| \cdot |\overrightarrow{PB}|} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ 11分

所以平面 AMN 与平面 PAC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$ 12分

20. (1) 设事件 A : 选出的六科中含有“语文, 数学, 外语, 历史, 地理”,

从物理、历史里选一门, 生物学、化学、思想政治、地理4门中选择2门的方案有 $C_2^2 C_4^2 = 12$ 种等可能情况, 1分

事件 A 即从剩余生物学、思想政治、化学三个科目中选择一个有 $C_3^1 = 3$ 种等可能情况, 2分

所以 $P(A) = \frac{C_3^1}{C_2^2 C_4^2} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ 3分

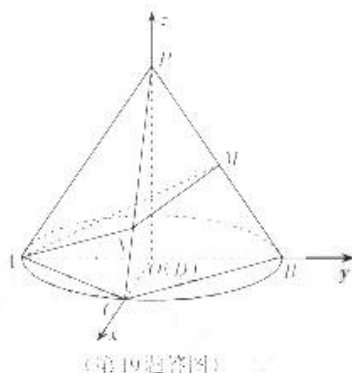
(2) 设此次网络测试的成绩 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

① 由题意可知 $\mu = 210$,

因为 $\frac{91}{4000} = 0.02275$, 且 $\frac{1 - P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)}{2} \approx \frac{1 - 0.9545}{2} = 0.02275$, 5分

即 $P(X \geq \mu + 2\sigma) \approx 0.02275, \mu + 2\sigma = 290$,

数学试题答案 第2页(共4页)





所以 $\sigma = \frac{290 - 210}{2} = 40$ 6分

而 $\frac{640}{4000} = 0.16$

$P(X \geq \mu + \sigma) = \frac{1 - P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)}{2} \approx \frac{1 - 0.6827}{2} = 0.15865 < 0.16$, 7分

所以前640名学生成绩的最低分低于 $\mu + \sigma = 210 + 40 = 250$,

而考生甲的成绩为260分,所以甲同学能够获得荣誉证书. 8分

②(结果是开放的,只要学生的统计理由充分,即可得分,以下两种理由供参考)

若考生乙所说为真,则 $\mu = 240$,

$P(X \geq \mu + 2\sigma) = \frac{1 - P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)}{2} \approx \frac{1 - 0.9545}{2} = 0.02275$,

而 $\frac{91}{4000} = 0.02275$, 所以 $\sigma = \frac{360 - 240}{2} = 60$, 10分

从而 $\mu + 3\sigma = 240 + 3 \times 60 = 420 < 425$.

理由1:根据统计学中的 3σ 原则,即认为 $X \geq \mu + 3\sigma$ 为小概率事件,即丙同学的成绩为425分是小概率事件,可认为其不可能发生,但却又发生了,所以可认为乙同学所说为假. 12分

理由2: $P(X \geq \mu + 3\sigma) = \frac{1 - P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)}{2} \approx \frac{1 - 0.9973}{2} = 0.00135$, 4000名学生中成绩大于420分的约有 $4000 \times 0.00135 = 5.4$ 人,这说明4000名考生中,也会出现约5人的成绩高于420分的“极端”样本,由于样本的随机性,丙同学的成绩为425分也有可能发生,所以可认为乙同学所说为真. 12分

21. 解:(1)将点A的坐标代入椭圆方程得 $\frac{3}{a^2} + \frac{1}{a^2 - 4} = 1$, 化简得 $a^4 - 8a^2 + 12 = 0$, 解得 $a^2 = 2$ (舍) 或 $a^2 = 6$, 故椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ 1分

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 由题易知直线l的斜率存在, 设直线l的方程为 $y = kx + m$, 联立直线l与椭圆C的方程并整理得 $(3k^2 + 1)x^2 + 6kmx + 3m^2 - 6 = 0$, 2分

$\Delta = 36k^2m^2 - 4(3k^2 + 1)(3m^2 - 6) > 0$, 即 $6k^2 - m^2 + 2 > 0$.

则 $x_1 + x_2 = \frac{-6km}{3k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{3m^2 - 6}{3k^2 + 1}$ 3分

由 $k_{AP} + k_{AQ} = \frac{y_1 - 1}{x_1 - \sqrt{3}} + \frac{y_2 - 1}{x_2 - \sqrt{3}} = \frac{kx_1 + m - 1}{x_1 - \sqrt{3}} + \frac{kx_2 + m - 1}{x_2 - \sqrt{3}} = 0$,

化简得 $2kx_1x_2 + (m - 1 - \sqrt{3}k)(x_1 + x_2) - 2\sqrt{3}(m - 1) = 0$,

故 $2k \cdot \frac{3m^2 - 6}{3k^2 + 1} + (m - 1 - \sqrt{3}k) \cdot \frac{-6km}{3k^2 + 1} - 2\sqrt{3}(m - 1) = 0$, 5分

整理得 $(\sqrt{3}k - 1)(\sqrt{3}k - 1 + m) = 0$, 又直线l不经过点A, 即 $\sqrt{3}k - 1 + m \neq 0$, 故 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 6分

(2)由(1)知, 直线l的方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + m (-2 < m < 2)$, $x_1 + x_2 = -\sqrt{3}m, x_1x_2 = \frac{3m^2 - 6}{2}$,

所以点A到直线l的距离 $d = \frac{\sqrt{3}}{2}|m|$,

$|PQ| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} \cdot \sqrt{(-\sqrt{3}m)^2 - 4 \times \frac{3m^2 - 6}{2}} = 2\sqrt{4 - m^2}$, 8分

所以 $S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} |PQ| \cdot d = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{4 - m^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} |m| = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(4 - m^2) \cdot m^2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4 - m^2 + m^2}{2} = \sqrt{3}$,

当且仅当 $4 - m^2 = m^2$, 即 $m = \pm\sqrt{2}$ 时等号成立. 10分

经验证, 此时满足直线l与椭圆C相交, 故 $\triangle APQ$ 的面积最大为 $\sqrt{3}$ 12分

22. 解: (1) 因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 所以 $f(x) \leq -1$ 成立, 等价于 $a \geq \frac{\ln x + x}{x^2}$ 成立. 1分

令 $h(x) = \frac{\ln x + x}{x^2}$, 则 $h'(x) = \frac{1 - x - 2\ln x}{x^3}$, 2分

令 $g(x) = 1 - x - 2\ln x$, 则 $g'(x) = -1 - \frac{2}{x} < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减, 又因为 $g(1) = 0$, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, 所以 $y = h(x)$ 在 $x = 1$ 处取极大值也是最大值. 4分

因此 $a \geq h(1) = 1$, 即实数 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$ 5分

(2) $f(x)$ 有 2 个不同的零点等价于 $a = \frac{\ln x}{x^2}$ 有 2 个不同的实数根.

令 $F(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, 则 $F'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$, 当 $F'(x) = 0$ 时, 解得 $x = \sqrt{e}$. 所以当 $x \in (0, \sqrt{e})$ 时, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 单调递增, 当 $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$ 时, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减, 所以 $y = F(x)$ 在 $x = \sqrt{e}$ 处取极大值为 $F(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$ 7分

又因为 $F(1) = 0$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $F(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $F(x) > 0$. 且 $x \rightarrow +\infty$ 时, $F(x) \rightarrow 0$. 所以 $1 < x_1 < \sqrt{e} < x_2$, 且 $a \in (0, \frac{1}{2e})$ 7分

因为 x_1, x_2 是方程 $a = \frac{\ln x}{x^2}$ 的 2 个不同实数根, 即 $\begin{cases} \ln x_1 = ax_1^2, \\ \ln x_2 = ax_2^2. \end{cases}$

将两式相除得 $\frac{x_2^2}{x_1^2} = \frac{\ln x_2}{\ln x_1}$,

令 $t = \frac{x_2}{x_1}$, 则 $t > 1$, $t^2 = \frac{\ln x_2}{\ln x_1}$, 变形得 $\ln x_1 = \frac{\ln t}{t^2 - 1}$, $\ln x_2 = \frac{t^2 \ln t}{t^2 - 1}$ 8分

又因为 $x_1^2 = \frac{\ln x_1}{a}$, $x_2^2 = \frac{\ln x_2}{a}$, 因此要证 $2x_1^2 + 3x_2^2 > \frac{12}{5a}$, 只需证 $\frac{2\ln x_1}{a} + \frac{3\ln x_2}{a} > \frac{12}{5a}$.

因为 $a > 0$, 所以只需证 $2\ln x_1 + 3\ln x_2 > \frac{12}{5}$, 即证 $\frac{2\ln t}{t^2 - 1} + \frac{3t^2 \ln t}{t^2 - 1} > \frac{12}{5}$.

因为 $t > 1$, 即证 $\ln t - \frac{12(t^2 - 1)}{5(3t^2 + 2)} > 0$ 10分

令 $G(t) = \ln t - \frac{12(t^2 - 1)}{5(3t^2 + 2)}$ ($t > 1$),

则 $G'(t) = \frac{(3t^2 - 2)^2}{t(3t^2 + 2)^2} \geq 0$, 所以 $G(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $G(t) > G(1) = 0$, 即当 $t > 1$ 时, $\ln t - \frac{12(t^2 - 1)}{5(3t^2 + 2)} > 0$ 成立,

命题得证. 12分



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服

务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖

全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

自主选拔在线
zizzsw



自主选拔在线
微信号：zizzsw

自主选拔在线
微信号：zizzsw

自主选拔在线
微信号：zizzsw