2023届高三第十三次模考数学（理科）
参考答案

一．选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	D	D	C	C	B	B	B	A	D	C

11. 【详解】A. $f(x+\pi)=\sin(x+\pi)+\frac{1}{2}\sin 2(x+\pi)=-\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x\neq f(x)$，故 A 错误；

B. $y=\sin x$，当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$ 时，取得最大值 1，$y=\frac{1}{2}\sin 2x$，当 $2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$ 时，即 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in Z$ 时，取得最大值 $\frac{1}{2}$，所以两个函数不可能同时取得最大值，所以 $f(x)$ 的最大值不是 $\frac{3}{2}$，故 B 错误；

C. $f(2\pi-x)=\sin(2\pi-x)+\frac{1}{2}\sin 2(2\pi-x)=-\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x\neq f(x)$，所以函数 $f(x)$ 的图象不关于直线 $x=\pi$ 对称，故 C 错误；

D. $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x=\sin x+\sin x\cos x=0$，即 $\sin x(1+\cos x)=0$，$[0,2\pi]$，

即 $\sin x=0$ 或 $\cos x=-1$，解得：$x=0,\pi,2\pi$，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上有 3 个零点，故 D 正确.

故选：D

12. 【详解】$\because$ N 是 BC 中点，$\therefore \overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

$\because M$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心，即三角形三边中垂线交点，

$\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle BAM=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{1}{2}\times 4^2=8$，同理可得 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=18$，

$\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\times 8+\frac{1}{2}\times 18=13$.

故选：C

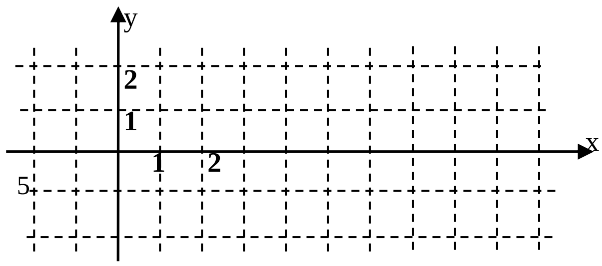
二、填空题

13. $(-\infty,3)$　　14. 0.5　　15. $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}$.　　16. 2

三、解答题：

三、解答题：（本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）



理科

设函数 $f(x)=2\sin(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{3})$.

(1）列表并画出 $y=f(x), x\in[-2,10]$ 的图象;

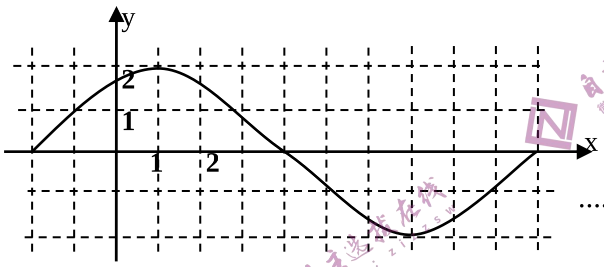
(2）求函数 $g(x)=f(1+x)+f(4-x)$ 在区间[0,6]上的值域.

解析:(1)列表:

$\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	-2	1	4	7	10
y	0	2	0	-2	0

......3 分

作图:



........................6 分

(2)由已知

$g(x)=f(1+x)+f(4-x)=2\sin(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{2})+2\sin(\pi-\frac{\pi}{6}x)=2\cos\frac{\pi}{6}x+2\sin\frac{\pi}{6}x=2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{4})$

由已知 $\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$ $\quad\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{4})\le 1$

$\therefore -2\le g(x)\le 2\sqrt{2}$

$\therefore$函数 $g(x)=f(1+x)+f(4-x)$ 在区间[0,6]上的值域是 $[-2,2\sqrt{2}]$. ....12 分

18.（本小题满分 12 分）

根据《国家学生体质健康标准》，高三男生和女生立定跳远单项等级如下（单位：cm）:

立定跳远单项等级	高三男生	高三女生
优秀	260 及以上	194 及以上
良好	245~259	180~193
及格	205~244	150~179

不及格	204 及以下	149 及以下

从某校高三男生和女生中各随机抽取12名同学，将其立定跳远测试成绩整理如下（精确到1cm）:

男生	180	205	213	220	235	245	250	258	261	270	275	280
女生	148	160	162	169	172	184	195	196	196	197	208	220

假设用频率估计概率，且每个同学的测试成绩相互独立．

（1）分别估计该校高三男生和女生立定跳远单项　优秀率；

（2）从该校全体高三男生中随机抽取2人，全体高三女生中随机抽取1人，设 X 为这3人中立定跳远单项等级为优秀的人数，估计 X 的数学期望 $E(X)$；

（3）从该校全体高三女生中随机抽取3人，设“这3人的立定跳远单项既有优秀，又有其它等级”为事件 A，“这3人的立定跳远单项至多有1个是优秀”为事件 B．判断 A 与 B 是否相互独立．(结论不要求证明)

解析：（1）样本中立定跳远单项等级获得优秀的男生人数为4，获得优秀的女生人数为6，

所以估计该校高三男生立定跳远单项的优秀率为 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$；

估计高三女生立定跳远单项的优秀率为 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$． …………4 分

（2）由题设，X 的所有可能取值为 $0,1,2,3$．

$P(X=0)$ 估计为 $(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$； $P(X=1)$ 估计为 $C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{2}=\frac{4}{9}$；

$P(X=2)$ 估计为 $C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+(\frac{1}{3})^2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{18}$； $P(X=3)$ 估计为 $(\frac{1}{3})^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$．

估计 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{2}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{5}{18}+3\times\frac{1}{18}=\frac{7}{6}$． …………8 分

（3） $P(A)$ 估计为 $C_3^1\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$；

$P(B)$ 估计为 $C_3^1\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_3^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}$； $P(AB)$ 估计为 $C_3^1\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$，

$P(AB)=P(A)P(B)$，所以 A 与 B 相互独立． …………12 分

19.（本小题满分 12 分）

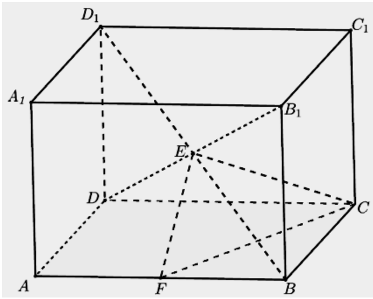
如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AD=2$，BD_1 和 B_1D 交于点 E，F 为 AB 的中点.

（1）求证：EF // 平面 ADD_1A_1；

（2）已知 B_1D 与平面 BCC_1B_1 所成角为 $\frac{\pi}{4}$，求

（i）平面 CEF 与平面 BCE 的夹角的余弦值;

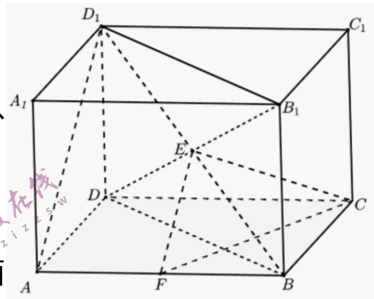
（ii）点 A 到平面 CEF 的距离.



解:（1）连接 AD_1， B_1D_1， BD.

因为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $BB_1 \parallel DD_1$ 且 $BB_1=DD_1$，

所以四边形 BB_1D_1D 为平行四边形.所以 E 为 BD_1 的中点,



在△ ABD_1 中， 因为 E， F 分别为 BD_1 和 AB 的中点， 所以 $EF \parallel AD_1$.

因为 $EF \not\subset$ 平面 ADD_1A_1， $AD_1 \subset$ 平面 ADD_1A_1，所以 $EF \parallel$ 平面 ADD_1A_1 ....6 分

（2） B_1D 与平面 BCC_1B_1 所成角为 $\frac{\pi}{4}$.连接 B_1C.

因为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $CD \perp$ 平面 BCC_1B_1， $B_1C \subset$ 平面 BCC_1B_1，

以 $CD \perp B_1C$.所以 $\angle DB_1C$ 为直线 B_1D 与平面 BCC_1B_1 所成角，即 $\angle DB_1C=\frac{\pi}{4}$.

所以△ DB_1C 为等腰直角三角形.

因为长方体中 $AA_1=AD=2$，所以 $B_1C=2\sqrt{2}$.所以 $CD=B_1C=2\sqrt{2}$.

如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$， 因为长方体中 $A_1A=AD=2, CD=2\sqrt{2}$， 则 $D(0,0,0)$， $A(2,0,0)$，

$C(0,2\sqrt{2},0)$， $B(2,2\sqrt{2},0)$， $F(2,\sqrt{2},0)$， $B_1(2,2\sqrt{2},2)$， $E(1,\sqrt{2},1)$.

所以 $\overrightarrow{CE}=(1,-\sqrt{2},1)$， $\overrightarrow{CF}=(2,-\sqrt{2},0)$， $\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$.

设平面 CEF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$， 则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1-\sqrt{2}y_1+z_1=0,\\ 2x_1-\sqrt{2}y_1=0.\end{cases}$

令 $x_1=1$， 则 $y_1=\sqrt{2}$， $z_1=1$， 可得 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{2},1)$.

设平面 BCE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$， 则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_2-\sqrt{2}y_2+z_2=0,\\ 2x_2=0.\end{cases}$

令 $y_2=1$，则 $x_2=0$， $z_2=\sqrt{2}$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,\sqrt{2})$.

设平面 CEF 与平面 BCE 的夹角为 θ ，则 $\cos\theta=|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

所以平面 CEF 与平面 BCE 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(ii)因为 $\overrightarrow{AF}=(0,\sqrt{2},0)$，

所以点 A 到平面 CEF 的距离为 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=1$. ....12 分

20.（本小题满分 12 分）

已知点 P 是平面直角坐标系 xOy 异于 O 的任意一点，过点 P 作直线 l_1： $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ 及 l_2： $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$ 的平行线，分别交 x 轴于 M ， N 两点，且 $|OM|^2+|ON|^2=8$.

（1）求点 P 的轨迹 C 的方程；

（2）在 x 轴正半轴上取两点 $A(m,0)$，$B(n,0)$，且 $mn=4$，过点 A 作直线 l 与轨迹 C 交于 E， F 两点，证明： $\sin\angle EBA=\sin\angle FBA$.

解：（1）设点 P 坐标为 (x_0,y_0)，则根据题意，得 $M\left(x_0-\dfrac{2}{\sqrt{3}}y_0,0\right),N\left(x_0+\dfrac{2}{\sqrt{3}}y_0,0\right)$，

由 $|OM|^2+|ON|^2=8$ 得： $\left(x_0-\dfrac{2}{\sqrt{3}}y_0\right)^2+\left(x_0+\dfrac{2}{\sqrt{3}}y_0\right)^2=8$，

化简得： $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$，所以轨迹 C 的方程为： $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1(x\neq\pm\sqrt{2})$. ....5 分

（2）当直线 l 的斜率不存在时，根据椭圆的对称性， $\sin\angle EBA=\sin\angle FBA$ 成立.

当直线 l 的斜率存在，由题意，设直线 l 的方程为： $y=k(x-m)$， $E(x_1,y_1)$， $F(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=k(x-m)\end{cases}$ 得： $(3+4k^2)x^2-8k^2mx+4k^2m^2-12=0$，

有 $\Delta>0$ 得： $m^2k^2<3+4k^2$，且 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2m}{3+4k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{4k^2m^2-12}{3+4k^2}$，

则 $k_{BE}+k_{BF}=\dfrac{y_1}{x_1-n}+\dfrac{y_2}{x_2-n}=\dfrac{y_1(x_2-n)+y_2(x_1-n)}{(x_1-n)(x_2-n)}=\dfrac{2kx_1x_2-(km+kn)(x_1+x_2)+2mnk}{(x_1-n)(x_2-n)}$，

又 $2kx_1x_2-(km+kn)\left(x_1+x_2\right)+2mnk=\dfrac{2k\left(4k^2m^2-12\right)}{3+4k^2}-\dfrac{8k^2m(km+kn)}{3+4k^2}+2mnk$

$=\dfrac{-24k+6mnk}{3+4k^2}$，因为 $mn=4$，所以 $k_{BE}+k_{BF}=0$，则 $\sin\angle EBA=\sin\angle FBA$.

综上所述，$\sin\angle EBA=\sin\angle FBA$. …………12 分

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{e^{ax}}{bx}$ 在 $x=1$ 处取得极值 e.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若不等式 $kx+\ln x\le x^2f(x)-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 k 的取值范围.

解：（1）由题意知：$f'(x)=\dfrac{ae^{ax}bx-e^{ax}b}{(bx)^2}$，

则 $\begin{cases}f'(1)=0\\ f(1)=e\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ae^ab-e^ab=0\\ \dfrac{e^a}{b}=e\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$，所以 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$，$f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$，

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减.

故 $f(x)$ 的单调增区间为 $(1,+\infty)$，单调减区间为 $(-\infty,1)$. …………5 分

（2）由 $kx+\ln x\le x^2f(x)-1\Leftrightarrow kx+\ln x\le xe^x-1$，因为 $x>0$，所以分离变量得：

$k\le\dfrac{xe^x-\ln x-1}{x}=e^x-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}$，令 $g(x)=e^x-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}(x>0)$，

则只需求 $g(x)$ 的最小值即可. $g'(x)=e^x-\dfrac{1-\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$，

令 $h(x)=x^2e^x+\ln x(x>0)$，$h'(x)=e^x\left(x^2+2x\right)+\dfrac{1}{x}>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $h(1)=e>0$，$h\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$，

$\therefore\exists x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 使得 $h\left(x_0\right)=0$，即：$x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，

移项并两边取对数得：$\ln\left(-\ln x_0\right)-\ln x_0=x_0+\ln x_0$，

因为函数 $y=x+\ln x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，$\therefore x_0=-\ln x_0$，即 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，

当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 上单调递减，在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g\left(x_0\right)=e^{x_0}-\dfrac{\ln x_0}{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{-x_0}{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=1$，$\therefore k\le 1$. …………12 分

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22.（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases}x=2\cos\varphi\\ y=3\sin\varphi\end{cases}(\varphi\text{为参数})$，以坐标原点为极点，$x$ 轴的正半轴为极轴建立坐标系，曲线 C_2 的坐标系方程是 $\rho=2$，正方形 $ABCD$ 的顶点都在 C_2 上，

且 A,B,C,D 依逆时针次序排列，点 A 的极坐标为 $(2,\dfrac{\pi}{3})$

（1）求点 A,B,C,D 的直角坐标；

（2）设 P 为 C_1 上任意一点，求 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2$ 的取值范围.

23.（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$，$M$ 为不等式 $f(x)<2$ 的解集.

（1）求 M；

（2）证明：当 a，$b\in M$ 时，$|a+b|<|1+ab|$.

22.（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

解：（1）点 A,B,C,D 的极坐标为 $(2,\dfrac{\pi}{3}),(2,\dfrac{5\pi}{6}),(2,\dfrac{4\pi}{3}),(2,\dfrac{11\pi}{6})$

点 A,B,C,D 的直角坐标为 $(1,\sqrt{3}),(-\sqrt{3},1),(-1,-\sqrt{3}),(\sqrt{3},-1)$ …………5 分

（2）设 $P(x_0,y_0)$；则 $\begin{cases}x_0=2\cos\varphi\\ y_0=3\sin\varphi\end{cases}(\varphi\text{为参数})$

$t=|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2=4x^2+4y^2+16=32+20\sin^2\varphi\in[32,52]$ …………10 分

23.（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

解析：（1）$f(x)=\begin{cases}-2x, x\le -\frac{1}{2},\\ 1, -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2},\\ 2x, x\ge \frac{1}{2}.\end{cases}$ 当 $x\le -\frac{1}{2}$ 时，由 $f(x)<2$ 得 $-2x<2$, 解得 $x>-1$；

当 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)<2$；

当 $x\ge\frac{1}{2}$ 时，由 $f(x)<2$ 得 $2x<2$, 解得 $x<1$.

所以 $f(x)<2$ 的解集 $M=\{x\,|\,-1<x<1\}$. ....5 分

（2）由（I）知，当 $a,b\in M$ 时，$-1<a<1,-1<b<1$，从而

$(a+b)^2-(1+ab)^2=a^2+b^2-a^2b^2-1=(a^2-1)(1-b^2)<0$，

因此 $|a+b|<|1+ab|$. ....10 分