四川省大数据精准教学联盟2020级高三第二次统一监测

理科数学答案解析与评分标准

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.【答案】B

【命题意图】本小题设置课程知识情境,设计复数的除法运算,主要考查复数的概念,复数的虚部,复数的代数运算等基础性知识;考查运算求解能力.

【解析】由 $\frac{3-2i}{1+i}=\frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-5i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$,所以其虚部为 $-\frac{5}{2}$.

2.【答案】C

【命题意图】本小题设置课程知识情境,设计不等式解法与集合运算问题,主要考查一元二次不等式的解法,集合的补集与交集运算,集合的表示方法等基础知识;考查运算求解能力.

【解析】集合 $A=\{x|x^2+x-6\leqslant 0\}=\{x|-3\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\{x|x<-1\}$,所以 $A\cap(\complement_{R}B)=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$.

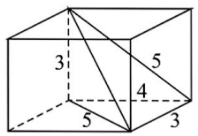
3.【答案】D

【考查意图】本小题以居民消费价格指数问题为情境,设计概率统计相关问题,主要考查统计图表识别与应用、统计量意义等基础知识;考查概率统计思想;考查直观想象、数据分析素养.

【解析】结合图表分析,选项D的分析较为恰当.

4.【答案】C

【考查意图】本小题考查空间几何体的三视图、直观图等基础知识;考查推理论证、空间想象、运算求解等能力;考查数形结合等思想方法.



【解析】由三视图可在长方体中还原出该几何体的直观图如右,易知该多面体的表面积为 $S=\frac{1}{2}\times(3\times4+3\times4+3\times5+3\times5)=27$.

5.【答案】A

【考查意图】本小题通过设置函数图象探索情境,设计函数图象和性质相关的问题,主要考查函数奇偶性、单调性、零点等知识综合应用;考查函数与方程、数形结合思想;考查推理论证、估算等能力,考查直观想象、逻辑推理素养.

【解析】由解析式可知 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$ 偶函数,排除选项C,D;由于 $f(2)=\cos(e^2-e^{-2}-2)$,由于 $\frac{3\pi}{2}<e^2-e^{-2}-2<2\pi$,则 $f(2)>0$.

6.【答案】D

【命题意图】本小题设置平面图形为情境，设计平面向量的线性运算，主要考查平面向量的平行四边形法则、平面几何图形的性质、平面向量的线性运算等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，数形结合思想，应用意识.

【解析】依题意，点 P 在线段 CD 上，则 $\overrightarrow{CP}=\mu\overrightarrow{CD}$，即 $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\mu(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})$，即 $\overrightarrow{AP}=\mu\overrightarrow{AD}+(1-\mu)\overrightarrow{AC}$，而 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+2\lambda\overrightarrow{AD}$，所以 $\frac{1}{3}+2\lambda=1,\lambda=\frac{1}{3}$.

7.【答案】D

【命题意图】本小题设置课程知识情境，设计三角恒等变形问题，主要考查同角三角函数关系，两角和差的余弦公式等基础知识；考查运算求解能力。

【解析】由 α 为锐角，且 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{5}$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{4}{5}$，则 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\cos\frac{\pi}{4}-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{4}=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

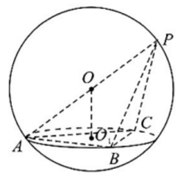
8.【答案】B

【命题意图】本小题设置课程知识情境，设计奇偶数列问题，主要考查等差数列的通项公式等基础知识；考查运算求解能力，分类讨论思想，逻辑推理素养.

【解析】由 $a_1=1$，$a_n+a_{n+1}=2n\cdots\cdots\cdots(1)$，$a_{n+1}+a_{n+2}=2n+2\cdots\cdots\cdots(2)$，$(2)-(1)$ 得 $a_{n+2}-a_n=2$，当 n 为奇数，设 $n=2k-1$，则 $a_{2k+1}-a_{2k-1}=2(k\in\mathbf{N}^*)$，此时 $\{a_{2k-1}\}$ 是以 $a_1=1$，公差为 2 的等差数列，所以 $a_{2k-1}=1+(k-1)\times2=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$，即 $a_n=n$（n 为奇数）；当 n 为偶数，设 $n=2k$，则 $a_{2k+2}-a_{2k}=2(k\in\mathbf{N}^*)$，此时 $\{a_{2k}\}$ 是以 a_2 为首项，公差为 2 的等差数列，令 (1) 中 $n=1$ 有 $a_1+a_2=2$，所以 $a_2=1$，所以 $a_{2k}=1+(k-1)\times2=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$，即 $a_n=n-1$（n 为偶数）. 综上可得，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}n, & n\text{ 为奇数},\\ n-1, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

9.【答案】B

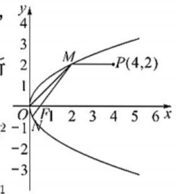
【考查意图】本小题以球体为载体考查空间点、线、面位置关系、勾股定理等基础知识，考查学生直观想象、运算求解、推理论证等能力；考查数形结合、化归与转化等思想方法.



【解析】如图，设 $AB=a$，O_1 为 $\triangle ABC$ 的外心，则 $AO_1=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，$OO_1=\sqrt{4-\frac{1}{3}a^2}$，$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times2\sqrt{4-\frac{1}{3}a^2}=\frac{a^2\sqrt{12-a^2}}{6}$. 记 $\sqrt{12-a^2}=t$，则 $0<t<2\sqrt{3}$，$V_{P-ABC}=-\frac{1}{6}t^3+2t$. 设 $f(t)=-\frac{1}{6}t^3+2t$，$0<t<2\sqrt{3}$，则 $f'(t)=-\frac{1}{2}t^2+2=-\frac{1}{2}(t+2)(t-2)$. 易知 $f(t)$ 在 $(0,2)$ 上递增，在 $(2,2\sqrt{3})$ 上递减，当 $t=2$，即 $a=2\sqrt{2}$ 时，$f(t)_{\max}=f(2)=\frac{8}{3}$.

10. 【答案】A

【考查意图】本小题考查抛物线的光学性质、过焦点弦的性质、向量的数量积、三角形面积公式等基础知识，考查学生直观想象、运算求解、推理论证等能力；考查数形结合、化归与转化等思想方法.



【解析】依题意，由抛物线性质知直线 MN 过焦点. 设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$l_{MN}:x=ty+\frac{p}{2}$. 由 $\begin{cases}x=ty+\frac{p}{2},\\ y^2=2px\end{cases}$ 得 $y^2-2pty-p^2=0$. 所以 $y_1y_2=-p^2$，$x_1x_2=\frac{y_1^2}{2p}\cdot\frac{y_2^2}{2p}=\frac{p^2}{4}$. 则 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=-\frac{3}{4}p^2=-\frac{3}{1}$，$p=1$. 而 $y_1=2$，则 $y_2=-\frac{1}{2}$. 所以 $S_{\triangle MON}=\frac{1}{2}\times|OF|\times|y_1-y_2|=\frac{5}{8}$.

11. 【答案】A

【命题意图】本小题以勾股树为情境，设计等比数列问题，主要考查等比数列的前 n 项和，通项公式等基础知识，考查运算求解能力，逻辑推理素养.

【解析】依题意，不同边长的正方形的个数，构成以 1 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=127$，即 $\frac{1-2^n}{1-2}=127$，解得 $n=7$，即有 7 种边长不同的正方形；又正方形的边长构成以 8 为首项，$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为公比的等比数列. 因此，边长为 8 的正方形 1 个，边长为 $4\sqrt{2}$ 的正方形 2 个，边长为 4 的正方形 4 个，边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形 8 个，边长为 2 的正方形 16 个，边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 32 个，边长为 1 的正方形 64 个. 所以这 127 个正方形的周长之和为 $1\times4\times8+2\times4\times4\sqrt{2}+4\times4\times4+8\times4\times2\sqrt{2}+16\times4\times2+32\times4\times\sqrt{2}+64\times4\times1=480+224\sqrt{2}$.

12. 【答案】A

【命题意图】本小题通过设置指数式与对数式大小探索性情景，设计函数与导数应用问题，主要考查利用导数研究函数性质等基础知识；考查推理论证、运算求解等数学能力，数学抽象、逻辑推理素养.

【解析】不等式 $e^x+e^2x\geqslant a(x^2-x\ln x)$ 化为 $\frac{e^x}{x}+a\ln x-ax+e^2\geqslant0$，即 $\frac{e^x}{x}+a\ln x-a\ln e^x+e^2\geqslant0$，所以 $\frac{e^x}{x}-a\ln\frac{e^x}{x}+e^2\geqslant0$. 设 $t=\frac{e^x}{x}(x>0)$，则 $t'=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，可知 $0<x<1$ 时，$t'(x)<0$，$t(x)$ 单调递减；$x>1$ 时，$t'(x)>0$，$t(x)$ 单调递增，所以 $t(x)\geqslant t(1)=e$. 令 $f(t)=t-a\ln t+e^2(t\geqslant e)$，则 $f'(t)=1-\frac{a}{t}=\frac{t-a}{t}(t\geqslant e)$. 当 $0<a\leqslant e$ 时，$f'(t)\geqslant0$，$f(t)$ 单调递增，则 $f(t)\geqslant f(e)=e-a+e^2\geqslant0$，则 $a\leqslant e+e^2$，故 $0<a\leqslant e$ 满足条件；当 $a>e$ 时，则 $f(t)$ 在 (e,a) 上单调递减；在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(t)_{\min}=f(a)=a-a\ln a+e^2\geqslant0$，设 $g(a)=a-a\ln a+e^2(a>e)$，则 $g'(a)=-\ln a<0$，则 $g(a)$ 在 $(e,+\infty)$ 单调递减，

又 $g(e^2)=e^2-e^2\ln e^2+e^2=0$，所以，$g(a)\geqslant g(e^2)$，则 $e<a\leqslant e^2$，综上所述，a 的取值范围为 $(0,e^2]$.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

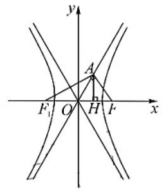
13.【答案】$\dfrac{11}{2}$

【命题意图】本小题设置课程知识情境，设计线性规划问题，主要考查在约束条件确定的可行域内求目标函数的最值问题；考查运算求解能力，数形结合思想，应用意识.

【解析】由约束条件作出可行域内以三点 $(1,-1)$，$(1,2)$，$\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 为顶点的三角形及其内部，当直线 $z=2x+y$ 过点 $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 时，z 取得最大值 $\dfrac{11}{2}$.

14.【答案】2

【命题意图】本小题考查双曲线的标准方程、双曲线的简单几何性质、锐角三角函数等基础知识；考查推理论证、运算求解等能力；考查数形结合、化归转化等思想方法.



【解析】如图，$S_{\triangle F_1AF_2}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|\times|AH|=c\times|AH|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c^2$. 所以，$|AH|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$. 由 $F_1A\perp F_2A$，得 $|OA|=c$，$\sin\angle AOH=\dfrac{|AH|}{|OA|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\angle AOH=\dfrac{\pi}{3}$. 故 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，则 $\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，则 $e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=2$.

15.【答案】$\dfrac{3}{10}$

【命题意图】本小题通过设置现实生活情境，设计计数原理应用与古典概型问题，主要考查排列组合数公式，古典概率等基础知识；考查运算求解能力，分类讨论思想，应用意识与创新能力.

【解析】从6项提升行动中任选3项有 $C_6^3=20$ 种选法，选出的3项中有“市民文明素养”且没有“背街小巷”有 $C_4^2=6$ 种选法，则概率为 $P=\dfrac{6}{20}=\dfrac{3}{10}$.

16.【答案】2525

【命题意图】本小题以函数为知识探索情境，设计函数与导数综合问题，主要考查函数奇偶性、对称性、导数应用等基础知识；考查化归与转化等数学思想；考查抽象概括、推理论证等数学能力；考查数学抽象，逻辑推理等素养.

【解析】因为 $f(1-2x)$ 为偶函数，则 $f(1+2x)=f(1-2x)$，即 $f(1+x)=f(1-x)$，则有 $f'(1+x)=-f'(1-x)$，即 $f'(1+x)+f'(1-x)=0$，故 $f'(x)$ 关于点 $(1,0)$ 对称，且 $f'(1)=0$；又 $\dfrac{1}{2}x-f(x+2)$ 为偶函数，则 $-\dfrac{1}{2}x-f(-x+2)=\dfrac{1}{2}x-f(x+2)$，所以 $-\dfrac{1}{2}+f'(-x+2)=\dfrac{1}{2}-f'(x+2)$，即 $f'(x+2)+f'(-x+2)=1$，故 $f'(x)$ 关于点 $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$ 对称，且 $f'(2)=$

$\frac{1}{2}$. 又 $f'(2)+f'(0)=0$，则 $f'(0)=-\frac{1}{2}$；$f'(3)+f'(1)=1$，则 $f'(3)=1$；$f'(4)+f'(0)=1$，则 $f'(4)=\frac{3}{2}$，…，$f'(101)=\frac{101-1}{2}$，所以 $\sum_{k=1}^{101}f'(k)=f'(1)+f'(2)+f'(3)+\cdots+f'(101)=0+\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{100}{2}=2525$.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17.【命题意图】本小题设置课程知识情境，设计三角形边角关系的不良问题，主要考查正弦定理、余弦定理、三角形面积、周长，三角形中线、角平分线性质等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，创新意识和应用意识.

【解析】(1)若选择①：

由正弦定理得，$\sin A=\sin B\cos C+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B$，

又 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，所以 $\cos B\sin C=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B$，

所以 $\tan B=\sqrt{3}$，又 $B\in(0,\pi)$，

故 $B=\frac{\pi}{3}$. ……2分

设 $a=2x$，$c=y$，则 $BD=DC=x$，

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理有 $x^2+y^2-xy=7$，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理有 $4x^2+y^2-2xy=7$， ② ……4分

联立①②得，$x=1$，$y=3$，即 $c=3$，$a=2$. ……6分

若选择②：

设 $a=2x$，则 $BD=DC=x$，

在 $\triangle ABD$ 中，$\cos\angle ADB=\frac{x^2+7-9}{2\sqrt{7}x}$， ……2分

在 $\triangle ACD$ 中，$\cos\angle ADC=\frac{x^2+7-7}{2\sqrt{7}x}$，

因为 $\angle ADB+\angle ADC=\pi$，所以 $\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$， ……4分

即 $\frac{x^2-2}{2\sqrt{7}x}+\frac{x^2}{2\sqrt{7}x}=0$，所以 $x=1$，

故 $a=2$. ……6分

(2)由题意和(1)的结论得，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle BCE}$，

所以 $\frac{1}{2}\times 2\times 3\times sin60^\circ=\frac{1}{2}\times 3\times BE\times sin30^\circ+\frac{1}{2}\times 2\times BE\times sin30^\circ$，

解得 $BE=\frac{6\sqrt{3}}{5}$， ……9分

又由角平分线性质有：$\frac{CE}{EA}=\frac{BC}{BA}=\frac{2}{3}$，

所以 $CE=\frac{2}{5}AC=\frac{2\sqrt{7}}{5}$.

所以 $\triangle BCE$ 的周长 $2+\frac{6\sqrt{3}+2\sqrt{7}}{5}$. ……………………………………………………12 分

18.【命题意图】本题考查多面体的结构特征、平面与平面垂直的性质定理、用空间向量证明四点共面、计算二面角的平面角等基础知识；考查空间想象、推理论证、运算求解等能力；考查化归与转化、数形结合等思想方法.

【解析】(1)证明：

取 AB 中点 O，连接 OC，OE.

因为 $AC=BC$，

所以 $\angle BAC$ 为锐角.

因为 $ED\parallel AB$，

所以 $\angle BAC$ 为异面直线 DE 与 AC 所成角，

则 $\angle BAC=45°$.

所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，故 $OC\perp AB$.

……………………………………………………………………………………1 分

因为平面 $ABDE\perp$ 平面 ABC，$DB\perp AB$，平面 $ABDE\cap$ 平面 $ABC=AB$，$DB\subset$ 平面 $ABDE$，

所以 $DB\perp$ 平面 ABC，$EO\perp$ 平面 ABC. ……………………………………………2 分

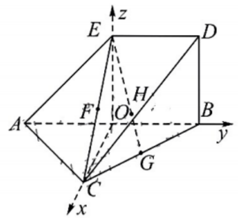
以 O 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OE}$ 的方向为正方向建立空间直角坐标系 $O-xyz$，

则 $A(0,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$C(1,0,0)$，$D(0,1,1)$，$E(0,0,1)$，$F(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$，$G(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$，$H(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. ……………………………………………3 分

$\overrightarrow{AF}=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AH}=(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3})$. ……………………4 分

于是，$\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，……………………………………………………5 分

所以 A，B，F，H 四点共面. ……………………………………………………6 分



说明：本小题也可以依据“点 H 是 ΔBCE 的重心，由点 F 为 CF 中点，可得 B，H，F 三点共线”证明结果.

(2)易知平面 BCD 的一个法向量 $\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，…………7分

则 $\overrightarrow{HC}=(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$，$\overrightarrow{HD}=(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$.

设平面 HCD 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{HC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{HD}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x-y-z=0,\\ -x+2y+2z=0.\end{cases}$

令 $z=1$，$x=0$，$y=-1$，可得 $\boldsymbol{m}=(0,-1,1)$. …………9分

设二面角 $H-CD-B$ 的平面角为 θ，则

$\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\boldsymbol{m}|}\right|=\frac{1}{2}$，…………11分

所以二面角 $H-CD-B$ 的余弦值为 $\frac{1}{2}$. …………12分

19.【考查意图】本小题以茶文化及品茶辨茶为生活实践情景，设置概率统计应用问题，考查卡方分布、离散型随机变量的分布列和数学期望等基础知识；考查运算求解、数据处理能力、应用能力及数学建模、数学运算素养.

【解析】(1) 由题，得 $K^2=\frac{400\times(50\times100-50\times200)^2}{100\times300\times150\times250}\approx8.889>6.635$，…………2分

因此，有99%的把握认为使用效果评价为“良好”的客户与性别有关系. …………3分

(2) 由题可知，X 的可能值为0，1，2，3，4. …………4分

$P(X=0)=C_2^0(\frac{1}{3})^2C_2^0(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{36}$，…………5分

$P(X=1)=C_2^1(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})C_2^0(\frac{1}{2})^2+C_2^0(\frac{1}{3})^2C_2^1(\frac{1}{2})^2=\frac{6}{36}$，…………6分

$P(X=2)=C_2^2(\frac{2}{3})^2C_2^0(\frac{1}{2})^2+C_2^1(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})C_2^1(\frac{1}{2})^2+C_2^2(\frac{1}{3})^2C_2^2(\frac{1}{2})^2=\frac{13}{36}$，…………7分

$P(X=3)=C_2^2(\frac{2}{3})^2C_2^1(\frac{1}{2})^2+C_2^1(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})C_2^2(\frac{1}{2})^2=\frac{12}{36}$，…………8分

$P(X=4)=C_2^2(\frac{2}{3})^2C_2^2(\frac{1}{2})^2=\frac{4}{36}$，…………9分

X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$(或填 $\frac{6}{36}$)	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{3}$(或填 $\frac{12}{36}$)	$\frac{1}{9}$(或填 $\frac{4}{36}$)

…………10分

则 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{36}+1\times\frac{6}{36}+2\times\frac{13}{36}+3\times\frac{12}{36}+4\times\frac{4}{36}=\frac{7}{3}$. …12分

20.【命题意图】本题考查椭圆的标准方程、椭圆的简单几何性质、直线与椭圆的位置关系、圆的标准方程、向量的数量积、基本不等式等基础知识；考查推理论证、运算求解等能力；考查数形结合、函数与方程、化归转化等思想方法.

【解析】(1)因为当点 N 为椭圆 C 的短轴端点时，$|NF_2|=a$，

所以 $a=bc$, $b=\frac{a}{c}=\sqrt{2}$. ……………………………………………………………1分

所以 $a^2=c^2+2$.

因为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $a=2$. ……………………………………………………………3分

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………4分

(2)设 $M(x_0,y_0)$,则 $x_0^2+y_0^2=4$.

而直线 AM 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$, ……………………………………………5分

由 $\begin{cases} y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2), \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$

得 $[(x_0+2)^2+2y_0^2]x^2+8y_0^2x+8y_0^2-4(x_0+2)^2=0$. ……………………………6分

则 $x_N-2=-\frac{8y_0^2}{(x_0+2)^2+2y_0^2}$,

即 $x_N=\frac{2(x_0+2)^2-4y_0^2}{(x_0+2)^2+2y_0^2}$, $y_N=\frac{y_0}{x_0+2}(x_N+2)=\frac{4(x_0+2)y_0}{(x_0+2)^2+2y_0^2}$.

则 $Q(\frac{2(x_0+2)^2-4y_0^2}{(x_0+2)^2+2y_0^2},\frac{-4(x_0+2)y_0}{(x_0+2)^2+2y_0^2})$. ……………………………7分

所以 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BM}=\left[\frac{2(x_0+2)^2-4y_0^2}{(x_0+2)^2+2y_0^2}+2\right](x_0-2)+\frac{-4(x_0+2)y_0^2}{(x_0+2)^2+2y_0^2}$

$=\frac{4(x_0+2)^2(x_0-2)-4(x_0+2)y_0^2}{(x_0+2)^2+2y_0^2}$

$=\frac{4(x_0+2)(x_0^2-y_0^2-4)}{(x_0+2)^2+2y_0^2}$

$=\frac{8(x_0^2-4)}{6-x_0}$. ……………………………………………………………9分

令 $6-x_0=t$,则 $4<t<8$.

则 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BM}=\frac{8(t^2-12t+32)}{t}$

$=8(t+\frac{32}{t}-12)\geqslant 8(2\sqrt{t\times\frac{32}{t}}-12)=64\sqrt{2}-96$

当且仅当 $t=\frac{32}{t}$,即 $t=4\sqrt{2}$ 时等号成立. ……………………………………11分

所以 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BM}$ 的最小值为 $64\sqrt{2}-96$. ……………………………12分

方法二: 设直线 AM 的方程为 $y=k(x+2)$,

则直线 BM 的方程为 $y=-\frac{1}{k}(x-2)$ ……………………………………………5分

由$\begin{cases}y=k(x+2),\\x^2+y^2=4\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=\dfrac{2(1-k^2)}{k^2+1},\\y=\dfrac{4k}{k^2+1}.\end{cases}$ 即$M(\dfrac{2(1-k^2)}{k^2+1},\dfrac{4k}{k^2+1})$. ……………………6分

由$\begin{cases}y=k(x+2),\\\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 得$(1+2k^2)x^2+8k^2x+8k^2-4=0$.

则$-2+x_N=\dfrac{-8k^2}{1+2k^2}$,

即$x_N=\dfrac{2-4k^2}{1+2k^2}$,$y_N=k(\dfrac{2-4k^2}{1+2k^2}+2)=\dfrac{4k}{1+2k^2}$.

即$N(\dfrac{2-4k^2}{1+2k^2},\dfrac{4k}{1+2k^2})$,$Q(\dfrac{2-4k^2}{1+2k^2},\dfrac{-4k}{1+2k^2})$. ……………………8分

则$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BM}=(\dfrac{2-4k^2}{1+2k^2}+2)\left[\dfrac{2(1-k^2)}{k^2+1}-2\right]+\dfrac{4k}{k^2+1}\cdot\dfrac{-4k}{1+2k^2}=\dfrac{-32k^2}{2k^4+3k^2+1}$

$=\dfrac{-32}{2k^2+\dfrac{1}{k^2}+3}\geqslant\dfrac{-32}{2\sqrt{2k^2\times\dfrac{1}{k^2}}+3}=\dfrac{-32}{2\sqrt{2}+3}=64\sqrt{2}-96$. ……………………10分

当且仅当$2k^2=\dfrac{1}{k^2}$,即$k^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时等号成立. ……………………11分

所以$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BM}$的最小值为$64\sqrt{2}-96$. ……………………12分

21.【考查意图】本小题以函数与不等式知识为探索情景,设置函数性质,大小比较等问题,考查函数单调性、极值、导数应用等基础知识;考查化归与转化,函数与方程等数学思想;考查推理论证、运算求解等数学能力;考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等素养.

【解析】(1) 由$f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}ax^2-x$得,$f'(x)=e^x-ax-1$,

由于函数$f(x)$单调递增,则$f'(x)=e^x-ax-1\geqslant0$恒成立, ……………………1分

设$h(x)=e^x-ax-1$,则$h'(x)=e^x-a$,

当$a=0$时,$f'(x)=e^x-1$,可知$x<0$时,$f'(x)<0$,不满足条件; ……………………2分

当$a<0$时,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增,

又$h(\dfrac{1}{a})=e^{\frac{1}{a}}-a\cdot\dfrac{1}{a}-1=e^{\frac{1}{a}}-2<0$,即$f'(\dfrac{1}{a})<0$,不满足条件; ……………………3分

当$a>0$时,令$h'(x)=0$,得$x=\ln a$,

则$0<x<\ln a$时,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减,$x>\ln a$时,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增,

所以$x=\ln a$时,$h(x)$取得极小值$h(\ln a)=e^{\ln a}-a\ln a-1=a-a\ln a-1$,

由$h(\ln a)\geqslant0$,得$a-1-a\ln a\geqslant0$,

令$u(a)=a-1-a\ln a$,则$u'(a)=-\ln a$,

可知$0<a<1$时,$u'(a)>0$,$u(a)$单调递增;$a>1$时,$u'(a)<0$,$u(a)$单调递减,

则$u(a)_{\max}=u(1)=0$,由于$a-1-a\ln a\geqslant0$恒成立,

所以,$a-1-a\ln a=0$,当且仅当$a=1$时取等号,

故 $f(x)$ 单调递增时，a 的值为1. ……5分

(2) $(1+3)(1+1)\cdots\left(1+\frac{3}{2^n-1}\right)<e^5$. ……6分

理由如下：

由(1)可知，当 $a=1$ 时，$e^x-x-1\geqslant 0$，即有 $e^x\geqslant x+1$，

则 $x>0$ 时，$\ln(x+1)<x$，……7分

故当 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$ 时，

$\ln\left[(1+3)(1+1)\cdots\left(1+\frac{3}{2^n-1}\right)\right]=\ln(1+3)+\ln\left(1+\frac{3}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{3}{2^n-1}\right)\leqslant$

$3+\frac{3}{3}+\cdots+\frac{3}{2^n-1}$，……8分

因为 $\frac{3}{2^n-1}=\frac{3(2^{n+1}-1)}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}<\frac{3\times 2^{n+1}}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=6\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$，……9分

所以 $3+\frac{3}{3}+\cdots+\frac{3}{2^n-1}<3+6\left[\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)\right]$

$=3+6\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)<5$，

即 $\ln\left[(1+3)(1+1)\cdots\left(1+\frac{3}{2^n-1}\right)\right]<5$，

所以，$(1+3)(1+1)\cdots\left(1+\frac{3}{2^n-1}\right)<e^5$. ……12分

（二）选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.【命题意图】本小题考查曲线的直角坐标方程与极坐标方程的互化，直线的参数方程，直线参数方程参数的几何意义，直线与圆的位置关系等基础知识；考查推理论证能力、运算求解等能力；考查化归与转化、数形结合等思想方法.

【解析】(1)由 $\rho=4\cos\theta$ 得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$，……2分

将 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$ 代入上式得 $x^2+y^2-4x=0$.

即 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4x=0$. ……5分

(2)将 C_1 的参数方程 $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$ 代入 C_2 的方程 $x^2+y^2-4x=0$，

整理得 $t^2+2(\sin\alpha-\cos\alpha)t-2=0$. ……6分

由 t 的几何意义可设 $|PA|=|t_1|$，$|PB|=|t_2|$.

因点 P 在 C_2 内，方程必有两个实根，

所以 $t_1+t_2=-2(\sin\alpha-\cos\alpha)$. ①，$t_1\cdot t_2=-2$. ② ……7分

因为 $\frac{1}{|PA|^2}+\frac{1}{|PB|^2}=\frac{|PA|^2+|PB|^2}{|PA|^2\cdot|PB|^2}$

$=\frac{t_1^2+t_2^2}{(t_1\cdot t_2)^2}=\frac{(t_1+t_2)^2-2t_1\cdot t_2}{(t_1\cdot t_2)^2}=2-\sin 2\alpha=1$，

所以 $\sin 2\alpha=1$.

因为 $\alpha\in[0,\pi)$,所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$. ……………………………………………………9分

所以 C_1 的普通方程为 $y=x$,

所以 C_1 的极坐标方程 $\theta=\dfrac{\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$. ……………………………………………10分

23.【考查意图】本小题以不等式为知识探索情景,设置最值与不等式证明问题,考查均值不等式、不等式证明方法等基础知识;考查推理论证、运算求解等能力;考查逻辑推理、数学运算等素养.

【解析】(1) 不存在 a,b,c,使 $a^2+b^2+4c^2\in(0,4)$. ……………………………………2分

由题,$(a^2+b^2+4c^2)(1+1+\dfrac{1}{4})\geqslant(a+b+2c\cdot\dfrac{1}{2})^2=9$,即 $a^2+b^2+4c^2\geqslant4$.

当且仅当 $a=b=\dfrac{2c}{\frac{1}{2}}$,且 $a+b+c=3$,即 $a=b=\dfrac{4}{3}$,$c=\dfrac{1}{3}$ 时"="成立,

所以 $a^2+b^2+4c^2$ 的最小值为4.

所以不存在 a,b,c,使 $a^2+b^2+4c^2\in(0,4)$. ……………………………………5分

(2) $\dfrac{1}{2a+\sqrt{bc}}+\dfrac{1}{2b+\sqrt{ac}}+\dfrac{1}{2c+\sqrt{ab}}$

$\geqslant\dfrac{1}{2a+\frac{b+c}{2}}+\dfrac{1}{2b+\frac{a+c}{2}}+\dfrac{1}{2c+\frac{a+b}{2}}$

$=\dfrac{2}{4a+b+c}+\dfrac{2}{4b+a+c}+\dfrac{2}{4c+a+b}$

$=\dfrac{2}{3a+3}+\dfrac{2}{3b+3}+\dfrac{2}{3c+3}$

$=\dfrac{1}{18}(3a+3+3b+3+3c+3)(\dfrac{2}{3a+3}+\dfrac{2}{3b+3}+\dfrac{2}{3c+3})$

$\geqslant\dfrac{1}{18}(\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2})^2$

$=1$,

当且仅当 $a=b=c=1$ 取"=".

所以 $\dfrac{1}{2a+\sqrt{bc}}+\dfrac{1}{2b+\sqrt{ac}}+\dfrac{1}{2c+\sqrt{ab}}\geqslant1$. ……………………………………10分