

七校联合体 2022 届高三第一次联考考试 (8 月)

数学科目

命题学校: 中山一中 命题人: 审题人:

(满分 150 分, 考试用时 120 分钟)

第一部分选择题 (共 60 分)

一、单项选择题: 本题共 8 道小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $A = \{x \mid x^2 < 4\}$ ,  $B = \{x \mid x > 0\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

A.  $\{x \mid 0 < x < 2\}$  B.  $\{x \mid x > -2\}$  C.  $\{x \mid -2 < x \leq 0\}$  D.  $\{x \mid 0 < x < 4\}$

2. 已知复数  $z$  满足  $(1+i)z = (1-i)$ , 则复数  $z$  的模  $|z| =$  ( )

A. 0 B. 1 C.  $\sqrt{2}$  D. 2

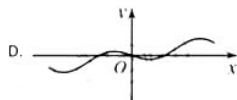
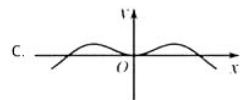
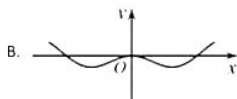
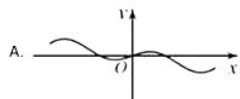
3. 做志愿者参与社区服务是学生参加社会公益活动的主要途径, 某个星期日有 4 名学生志愿者随机平均分配到 A、B 两个社区进行垃圾分类宣传活动, 则其中甲乙两人都被分配到 A 社区的概率是 ( )

A.  $\frac{1}{2}$  B.  $\frac{1}{4}$  C.  $\frac{1}{6}$  D.  $\frac{1}{3}$

4. 二项式  $\left(x - \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^6$  展开式中常数项是 ( )

A. 20 B. -20 C.  $40\sqrt{2}$  D.  $-40\sqrt{2}$

5. 函数  $f(x) = \frac{1-2^x}{1+2^x} \cdot \cos x$  的图像的大致形状是 ( )



6. 已知实数  $\alpha, \beta$ , " $\alpha + \beta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ " 是 " $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta$ " 的 ( )

- A. 充分而不必要条件    B. 必要而不充分条件    C. 充分必要条件    D. 既不充分也不必要条件

7. 故宫是世界上现存规模最大、保存最为完整的木质结构古建筑群，故宫宫殿房檐设计恰好使北房在冬至前后阳光满屋，夏至前后屋檐遮荫，已知北京地区夏至前后正午太阳高度角为  $75^{\circ}C$ ，冬至前后正午太阳高度角约为  $30^{\circ}C$ ，图 1 是顶部近似为正四棱锥、底部近似为正四棱柱的宫殿，图 2 是其示意图，则其出檐 AB 的长度（单位：米）约为（    ）



图1

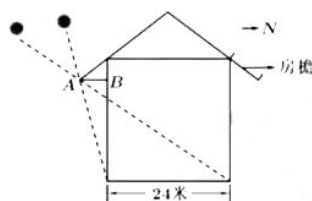


图2

- A. 3    B. 4    C.  $6(\sqrt{3} - 1)$     D.  $3(\sqrt{3} + 1)$

8. 已知点 P 在  $x + y = 4$  上，过点 P 做圆 O:  $x^2 + y^2 = 4$  的两条切线，切点分别为 A, B，则点 M (3, 2) 到直线 AB 距离的最大值为（    ）

- A.  $\sqrt{2}$     B.  $\sqrt{3}$     C. 2    D.  $\sqrt{5}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的对 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数  $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4})$ ，则（    ）

- A.  $f(x)$  是周期为  $\pi$  的周期函数    B.  $f(x)$  的值域是  $[-1, 1]$     C.  $f(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上单调递增  
D. 将  $f(x)$  的图像向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度后，可得一个奇函数的图像

10. 设  $F_1, F_2$  分别是双曲线 C:  $\frac{x^2}{s+t} - \frac{y^2}{s-t} = 1$  的左、右焦点，且  $|F_1F_2| = 8$ ，则下列结论正确的是（    ）

- A.  $s = 8$     B. t 的取值范围是  $(-8, 8)$   
C.  $F_1$  到渐近线的距离随着 t 的增大而减小    D. 当  $t = 4$  时，C 的实轴长是虚轴长的 3 倍

11. 已知两个不为零的实数  $x, y$  满足  $x < y$ , 则下列结论正确的是 ( )

- A.  $3^{x-y} > 1$       B.  $xy < y^2$       C.  $x |x| < y |y|$       D.  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} < e^x - e^y$

12. 英国数学家牛顿在 17 世纪给出了一种求方程近似根的方法—牛顿迭代法, 做法如下: 如图设  $r$  是  $f(x) = 0$  的根, 选取  $x_0$  作为  $r$  的初始近似值, 过点  $(x_0, f(x_0))$  作曲线  $y = f(x)$  的切线

$l: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ , 则  $l$  与  $x$  轴的交点的横坐标  $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$  ( $f'(x_0) \neq 0$ ), 称  $x_1$

是  $r$  的一次近似值; 过点  $(x_1, f(x_1))$  作曲线  $y = f(x)$  的切线, 则该切线与  $x$  轴的交点的横坐标  $x_2$ , 称  $x_2$

是  $r$  的二次近似值; 重复以上过程, 得  $r$  的近似值序列, 其中  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  ( $f'(x_n) \neq 0$ ), 称  $x_{n+1}$

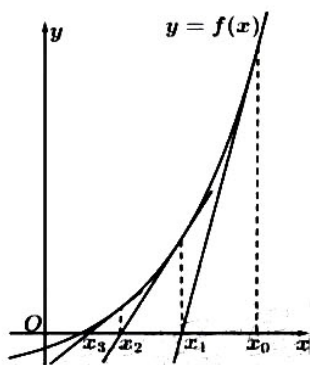
是  $r$  的  $n+1$  近似值, 这种求方程  $f(x) = 0$  近似解的方法称为牛顿迭代法. 若使用该方法求方程  $x^2 = 2$  的近似解, 则 ( )

A. 若取初始近似值为 1, 则该方程的二次近似值为  $\frac{17}{12}$

B. 若取初始近似值为 2, 则该方程的二次近似值为  $\frac{17}{12}$

C.  $x_4 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$

D.  $x_4 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} + \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$



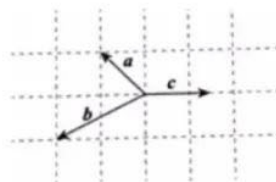
第二部分非选择题 (共 90 分)

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

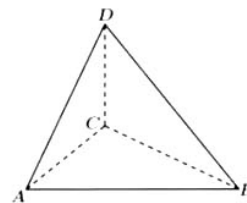
13. 函数  $f(x) = 2x + \cos x$  在点  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  处的切线与两坐标轴围成的三角形面积是 \_\_\_\_\_

14. 试写出一个离心率为  $\frac{1}{2}$  焦点在  $y$  轴上的椭圆的标准方程 \_\_\_\_\_ .

15. 向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  在边长为 1 的正方形网格中的位置如图所示, 若  $\vec{e}$  为与  $\vec{d}$  同方向的单位向量, 则  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{e} =$  \_\_\_\_\_



16. 《九章算术》是我国古代数学名著，它在几何学中的研究比西方早一千多年，书中将四个面都为直角三角形的四面体称为鳖臑，在鳖臑 ABCD 的四个直角三角形中，BD 是 Rt△BAD 和 Rt△BCD 的斜边，且所有直角三角形斜边长分别为  $AD = \sqrt{5}, BC = \sqrt{13}, BD = \sqrt{14}$ ，它的所有顶点都在球 O 的球面上，则球 O 的体积为 \_\_\_\_\_。



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 在① $a_4 = 2a_2$ ，② $b_3 - b_2 = 4$ ，③ $T_3 = 6$  这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，若问题中正整数 k 存在，求 k 的值；若问题中的正整数 k 不存在，说明理由。

问题：已知等差数列  $\{a_n\}$  的前 n 项和为  $S_n$ ，各项为正的等比数列  $\{b_n\}$  的前 n 项和为  $T_n$ ，

$T_1 = 2S_1 = 2, S_3 = T_2$ ，且 \_\_\_\_\_，是否存在正整数 k 使  $T_5 \leq 2S_k \leq T_6$  成立？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

18. (12 分) 在△ABC 中，内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c.  $a = \sqrt{3}c \sin B + b \cos C$  点 D 为 AB 边上的一点， $AD = 2BD = 2, CD = \sqrt{7}$ .

(1) 求 B; (2) 求△ABC 的面积.

19. (12 分) 某厂研制了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品，得到各件产品该项指标数据如下：

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

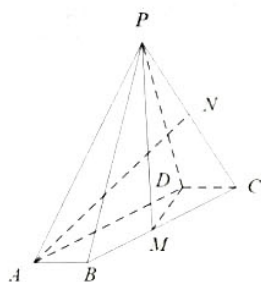
旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为  $\bar{x}$  和  $\bar{y}$ ，样本方差分别记为  $S_1^2$  和  $S_2^2$ 。

(1) 求  $\bar{x}, \bar{y}, S_1^2, S_2^2$ ;

(2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高 (如果  $\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{10}}$  则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高，否则不认为有显著提高)。

20. (12分) 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是平行四边形,  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $AB = 1$ ,  $BC = 4$ ,  $PA = \sqrt{15}$ .  $M$ 、 $N$  分别是  $BC$ 、 $PC$  的中点,  $PD \perp DC$ ,  $PM \perp MD$

- (1) 证明:  $AB \perp PM$ ;  
(2) 求直线  $AN$  与平面  $PDM$  所成的角正弦值.

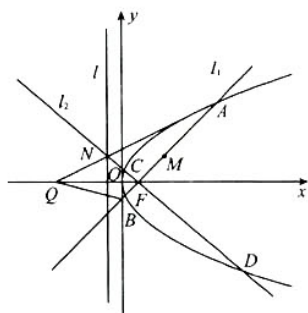


21. (12分) 已知函数  $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 + (a+1)x^2 - ax$ .

- (1) 若  $f(x)$  在  $(2, +\infty)$  上有极值, 求  $a$  的取值范围;  
(2) 求证: 当  $-1 < a < 2$  时, 过点  $P(0, -1)$  只有一条直线与  $f(x)$  的图像相切.

22. (12分) 如图所示, 过抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点  $F$  做互相垂直的直线  $l_1, l_2$ ,  $l_1$  交抛物线与  $A, B$  两点 ( $A$  在  $x$  轴上方),  $l_2$  交抛物线与  $C, D$  两点, 交其准线于点  $N$ .

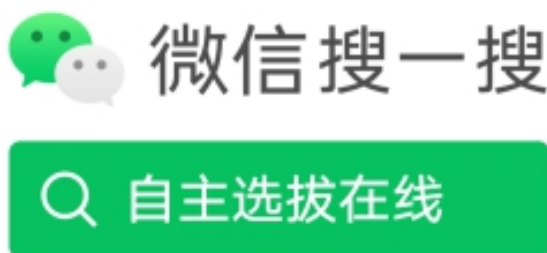
- (1) 设  $AB$  的中点为  $M$ , 求证:  $MN$  垂直于  $y$  轴;  
(2) 若直线  $AN$  与  $x$  轴交于  $Q$ , 求  $\triangle AQB$  面积的最小值.



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》