准考证号

姓名

考场

考点

绝密★启用前

2023年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学试题卷

（银川一中第三次模拟考试）

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．作答时，务必将答案写在答题卡上。写在本试卷及草稿纸上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题（本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1．已知集合 $A=\{1,3,5,7\}$， $B=\{x|-1<x<3,x\in N^*\}$，则 $A\cup B$ 中的元素个数为

A．6　　B．5　　C．4　　D．3

2．已知 $a\in R$，复数 $(a+i)(1-3i)$ 是实数，则 $a=$

A．$\frac{1}{3}$　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．3　　D．-3

3．命题“有一个偶数是素数”的否定是

A．任意一个奇数是素数　　B．任意一个偶数都不是素数

C．存在一个奇数不是素数　　D．存在一个偶数不是素数

4．如图，是1963年在陕西宝鸡贾村出土的一口“何尊”（尊为古代的酒器，用青铜制成），尊内底铸有12行、122字铭文．铭文中写道“唯武王既克大邑商，则廷告于天，曰：‘余其宅兹中国，自之辟民’”，其中宅兹中国为“中国”一词最早的文字记载．“何尊”可以近似看作是圆台和圆柱组合而成，经测量，该组合体的高约为40cm，上口的直径约为28cm，圆柱的高和底面直径分别约为24cm，18cm，则“何尊”的体积大约为

A．$4093\pi\ cm^3$　　B．$4082\pi\ cm^3$

C．$4063\pi\ cm^3$　　D．$4282\pi\ cm^3$

5．已知$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，α是第一象限角，且$\tan(\alpha+\beta)=1$，则$\tan\beta$的值为

A．$-\dfrac{3}{4}$　　B．$\dfrac{3}{4}$　　C．$-\dfrac{1}{7}$　　D．$\dfrac{1}{7}$

6．已知两条不同的直线l，m及三个不同的平面α，β，γ，下列条件中能推出$\alpha//\beta$的是

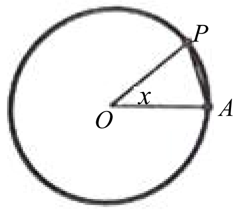
A．l与α，β所成角相等　　B．$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$

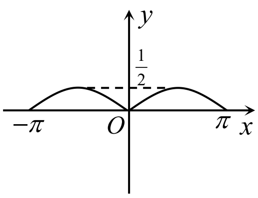
C．$l\perp\alpha$，$m\perp\beta$，$l//m$　　D．$l\subset\alpha$，$m\subset\beta$，$l//m$

7．函数$f(x)=\log_2 x+x^2+m$在区间$(2,4)$上存在零点．则实数m的取值范围是

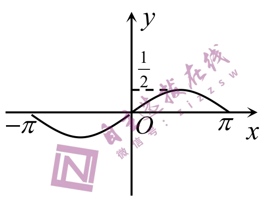
A．$(-\infty,-18)$　　B．$(5,+\infty)$　　C．$(5,18)$　　D．$(-18,-5)$

8．如图，圆O的半径为1，A是圆上的定点，P是圆上的动点，角x的始边为射线OA，终边为射线OP，将△POA的面积表示为x的函数$f(x)$，则$y=f(x)$在$[-\pi,\pi]$上的图象大致为

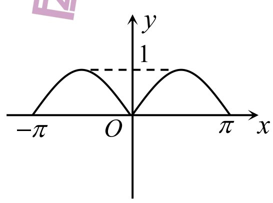




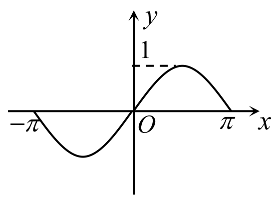
A



B



C



D

9．在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°,\angle B=30°$，$\angle BAC$的平分线交$BC$于点$D$．

若$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}\ (\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，则$\dfrac{\lambda}{\mu}=$

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．2　　D．3

10．已知双曲线$C:\dfrac{y^2}{5}-\dfrac{x^2}{m}=1(m>0)$的上、下焦点分别为$F_1$，$F_2$，若存在点$M(\lambda,\lambda)$，使得$|MF_2|-|MF_1|=2\sqrt{5}$，则实数$m$的取值范围为

A．$(1,+\infty)$　　B．$(1,5)$　　C．$(5,+\infty)$　　D．$(0,5)$

11．英国数学家泰勒1712年提出了泰勒公式，这个公式是高等数学中非常重要的内容之一．其正弦展开的形式如下：$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$，（其中$x\in\mathbf{R}$，$n\in\mathrm{N}^*$），则$1-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{6!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-2)!}+\cdots$的值约为（1弧度$\approx57°$）

A．$\sin57°$　　B．$-\sin57°$　　C．$-\sin33°$　　D．$\sin33°$

12．已知关于 x 的不等式 $e^{ax} \geq x+b$ 对任意 $x \in R$ 恒成立，则 $\frac{b}{a}$ 的最大值为

A．$\frac{1}{2}$　　　　B．1　　　　C．$\frac{e}{2}$　　　　D．e

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．已知 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中，第三项和第四项的二项式系数相等，则 $n=$__________.

14．若函数 $f(x)=\frac{x^2}{2}-\ln x$ 在区间 $(m, m+\frac{1}{3})$ 上不单调，则实数 m 的取值范围为________.

15．已知直线 l：$kx-y-2k+2=0$ 被圆 C：$x^2+(y+1)^2=16$ 所截得的弦长为整数，则满足条件的直线 l 有______________条.

16．已知△ABC 的三边分别为 a、b、c，所对的角分别为 A、B、C，且满足 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$，且△$ABC$ 的外接圆的面积为 3π，则 $f(x)=\cos 2x+4(a+c)\sin x+1$ 的最大值的取值范围为___________.

三、共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分)

17．(12 分)

已知公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1，且 a_1, a_2, a_5 是一个等比数列的前三项，记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

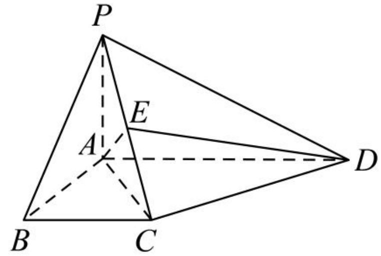
(2)求数列 $\{(-1)^n S_n\}$ 的前 20 项的和.

18．(12 分)

如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA \perp$ 平面 $ABCD$，$AD \parallel BC$，$AB \perp BC$，且 $AB=AP=BC=1$，$AD=2$.

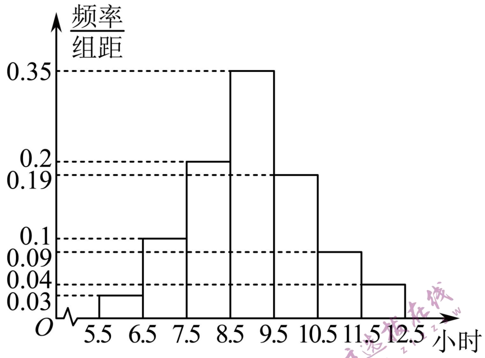
(1)求证：$CD \perp$ 平面 PAC；

(2)若 E 为 PC 的中点，求 PD 与平面 AED 所成角的正弦值.



19．(12 分)

为保障全民阅读权利，培养全民阅读习惯，提高全民阅读能力，推动文明城市和文化强市建设，某高校为了解全校学生的阅读情况，随机调查了 200 名学生的每周阅读时间 x(单位：小时)并绘制如图所示的频率分布直方图：



(1)求这 200 名学生每周阅读时间的样本平均数 $\overline{x}$ 和样本方差 s^2 (同一组的数据用该组区间中点值代表)；

(2)由直方图可以看出，目前该校学生每周的阅读时间 x 大致服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，其中 μ 近似为样本平均数 $\overline{x}$，σ^2 近似为样本方差 s^2.

①一般正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的概率都可以转化为标准正态分布 $N\left(0,1\right)$ 的概率进行计算：若 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，令 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$，则 $Y\sim N\left(0,1\right)$，且 $P\left(X\leq a\right)=P\left(Y\leq\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$.利用直方图得到的正态分布，求 $P\left(X\leq 10\right)$；

②从该高校的学生中随机抽取 20 名，记 Z 表示这 20 名学生中每周阅读时间超过 10 小时的人数，求 Z 的均值.

参考数据：$\sqrt{178}\approx\dfrac{40}{3}$，若 $Y\sim N\left(0,1\right)$，则 $P\left(Y\leq 0.75\right)=0.7734$.

20．(12 分)

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的右焦点为$F$，有两个不同的点$P$、$Q$在椭圆$C$上运动，且$\left|PF\right|$的最小值为$\sqrt{6}-\sqrt{3}$；当点$P$不在$x$轴上时点$P$与椭圆$C$的左、右顶点连线的斜率之积为$-\dfrac{1}{2}$.

(1)求椭圆C的方程；

(2)已知直线$l:x-2y=0$与椭圆C在第一象限交于点A，若$\angle PAQ$的内角平分线的斜率不存在.探究：直线PQ的斜率是否为定值，若是，求出该定值；若不是.请说明理由.

21．(12 分)

已知函数$f\left(x\right)=\left(x+b\right)\left(\mathrm{e}^x-a\right)\left(b>0\right)$在$\left(-1,f\left(-1\right)\right)$处的切线方程为$\left(\mathrm{e}-1\right)x+\mathrm{e}y+\mathrm{e}-1=0$.

(1)求a，b的值；

(2)若方程$f\left(x\right)=m$有两个实数根x_1,x_2

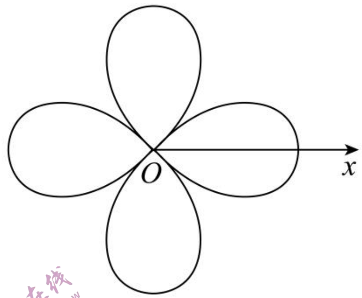
①证明：$m>-\dfrac{1}{2}$；

②当$m<0$时，$|x_2-x_1|>2m+1$是否成立？如果成立，请简要说明理由.

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 两题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22．[选修 4—4：坐标系与参数方程]

下图所示形如花瓣的曲线G称为四叶玫瑰线，并在极坐标系中，其极坐标方程为$\rho=2\cos 2\theta$.



(1)若射线l：$\theta=\dfrac{\pi}{6}$与G相交于异于极点O的点P，G与极轴的交点为Q，求$|PQ|$；

(2)若A，B为G上的两点，且$\angle AOB=\dfrac{2\pi}{3}$，求$\triangle AOB$面积S的最大值.

23．[选修 4-5：不等式选讲]

设函数$f(x)=|2x-2|+|2x+1|$.

(1)解不等式$f(x)\le 4+x$；

(2)令$f(x)$的最小值为T，正数a，b，c满足$a+b+c=T$，证明：$\sqrt{ab}+\sqrt{ac}\le\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.