2023届“皖南八校”高三开学考试

数　学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
3. 本卷命题范围：高考范围

一、单项选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{y|y=2^x\}$，$N=\{y|y=\sqrt{1-x^2}\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{x|0<x<1\}$　　B. $\{x|0<x\leqslant 1\}$　　C. $\{x|x\leqslant 1\}$　　D. $\{x|x>0\}$

2. 若 $z(1+2i)=2-i$（i 为虚数单位），则复数 $z=$

A. $-i$　　B. i　　C. 1　　D. -1

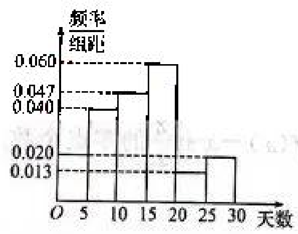
3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,m)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 m 的值为

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

4. 若 $a=0.7^{-0.5}$，$b=\log_{0.5}0.7$，$c=\log_{0.7}5$，则

A. $b<a<c$　　B. $a<b<c$　　C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

5. 某滑冰馆统计了2021年11月1日到30日某小区居民在该滑冰馆的锻炼天数，得到如图所示的频率分布直方图（将频率视为概率），则下列说法正确的是



A. 该小区居民在该滑冰馆的锻炼天数在区间(25,30]内的最少

B. 估计该小区居民在该滑冰馆的锻炼天数的中位数为16

C. 估计该小区居民在该滑冰馆的锻炼天数的平均值大于14

D. 估计该小区居民在该滑冰馆的锻炼天数超过15天的概率为0.456

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_3+a_5=-10$，$S_6=-42$，则 $S_{10}=$

A. 6　　B. 10　　C. 12　　D. 20

7. “$m=-1$”是“直线 $l_1:mx+2y+1=0$ 与直线 $l_2:\frac{1}{2}x+my+\frac{1}{2}=0$ 平行”的

A. 充要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分不必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 若曲线 $y=\ln x+x^2$ 的一条切线的斜率为 3，则该切线的方程可能为

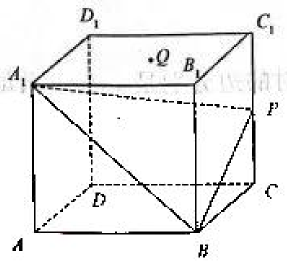
A. $3x-y-1=0$　　B. $3x-y+1=0$

C. $3x-y-2=0$　　D. $3x-y-1-\ln 2=0$

9. 函数 $f(x)=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称中心为

A. $\left(\frac{\pi}{12},0\right)$　　B. $\left(\frac{7\pi}{12},0\right)$　　C. $\left(-\frac{5\pi}{12},0\right)$　　D. $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$

10. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，P 为 CC_1 的中点，点 Q 在四边形 DCC_1D_1 内(包括边界)运动，若 $AQ//$平面 A_1BP，则 AQ 的最小值为



A. 1　　B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{7}$

11. 已知点 M 在抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上，若以点 M 为圆心半径为 5 的圆与抛物线 C 的准线相切，且与 x 轴相交的弦长为 6，则 $p=$

A. 2　　B. 8　　C. 2 或 8　　D. 6

12. 已知函数 $y=f(x+1)$ 的图象关于直线 $x=-3$ 对称，且对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)+f(-x)=2$. 当 $x\in(0,2]$时，$f(x)=x+2$. 则 $f(2\ 022)=$

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. -2

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^4$ 的展开式中的常数项为________.

14. 已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\tan(\alpha-\beta)=-\frac{1}{3}$，则 $\tan\beta=$________.

15. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长为 3，高为 2，若该四棱锥的五个顶点都在一个球面上，则球心到四棱锥侧面的距离为________.

16. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F_2，过点 F_2 斜率为 k 的直线 l 与双曲线 C 的右支交于 A，B 两点，点 $P(-2\sqrt{3},0)$，若△ABP 的外心 Q 的横坐标为 0，则直线 l 的方程为______________.

三、解答题：本题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}=3a_n(n\in N^*)$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$.

18.（12分）

已知△ABC的内角A，B，C所对的边分别是a，b，c，满足$\frac{a}{b}=\frac{\cos A+1}{\sqrt{3}\sin B}$.

（1）求角A；

（2）若$b+c=2a$，且△ABC外接圆的直径为2，求△ABC的面积.

19.（12分）

产品的质量是一个企业在市场中获得消费者信赖的重要因素，某企业对出厂的每批次产品都进行性能测试. 某检验员在某批次的产品中抽取5个产品进行性能测试，现有甲、乙两种不同的测试方案，每个产品随机选择其中的一种进行测试，已知选择甲方案测试合格的概率为$\frac{1}{2}$，选择乙方案测试合格的概率为$\frac{3}{4}$，且每次测试的结果互不影响.

（1）若3个产品选择甲方案，2个产品选择乙方案.

（ⅰ）求5个产品全部测试合格的概率；

（ⅱ）求4个产品测试合格的概率.

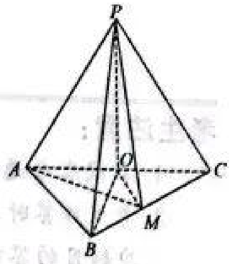
（2）若测试合格的产品个数的期望不小于3，求选择甲方案进行测试的产品个数.

20.(12分)

如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中,$AB\perp BC$,$AB=BC=2$,$PA=PB=PC=2\sqrt{2}$,O 为 AC 的中点.

(1)证明:$AC\perp$平面 PBO;

(2)若 M 为棱 BC 的中点,求二面角 $M-PA-C$ 的正弦值.



21.(12分)

已知椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点为 F_1,F_2,且左焦点坐标为 $(-\sqrt{2},0)$,P 为椭圆上的一个动点,$\angle F_1PF_2$ 的最大值为 $\frac{\pi}{2}$.

(1)求椭圆 M 的标准方程;

(2)若过点 $(-2,-4)$ 的直线 l 与椭圆 M 交于 A,B 两点,点 $N(2,0)$,记直线 NA 的斜率为 k_1,直线 NB 的斜率为 k_2,证明:$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=1$.

22.(12分)

已知函数 $f(x)=-ax^2+x\ln x-x$.

(1)若 $f(x)$ 有两个极值点,求实数 a 的取值范围;

(2)当 $a=0$ 时,求函数 $h(x)=f(x)-x+\frac{2}{x}$ 的零点个数.

2023 届“皖南八校”高三开学考试·数学
参考答案、解析及评分细则

1.B　因为 $M=\{y|y=2^x\}=(0,+\infty)$，$N=\{y|y=\sqrt{1-x^2}\}=[0,1]$，所以 $M\cap N=(0,1]$，故选 B.

2.A　因为 $z(1+2i)=2-i$，所以 $z=\frac{2-i}{1+2i}=\frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=-\frac{5i}{5}=-i$，故选 A.

3.B　由题可知，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2-2m=0$，解得 $m=-1$. 故选 B.

4.D　$c=\log_{0.7}5<\log_{0.5}5<\log_{0.5}0.7=b<1$，$a=0.7^{-0.5}>1$，故 $a>b>c$，故选 D.

5.C　频率分布直方图中，最低小矩形所在的区间为 $(20,25]$，故选项 A 错误.

由频率分布直方图可得，前三个小矩形的面积之和为 $(0.02+0.04+0.047)\times5=0.535>0.5$，所以估计该小区居民在该滑冰馆的锻炼天数的中位数小于 15，故选项 B 错误；

由频率分布直方图可得，$\bar{x}=0.02\times5\times2.5+0.04\times5\times7.5+0.047\times5\times12.5+0.06\times5\times17.5+0.013\times5\times22.5+0.02\times5\times27.5=14.15>14$，故选项 C 正确；

由频率分布直方图可得，该小区居民在该滑冰馆的锻炼天数超过 15 天的概率为 $(0.06+0.013+0.02)\times5=0.165$，故选项 D 错误. 故选 C.

6.B　由题意，设数列公差为 d. 因为 $a_3-a_5=2a_1+6d=-10$，$S_6=6a_1+15d=-12$，

解得 $a_1=-17$，$d=1$，所以 $S_{10}=10a_1-15d=-170-15\times1=10$，故选 B.

7.A　因为 $m=-1$，所以直线 $l_1:-x+2y+1=0$，直线 $l_2:\frac{1}{2}x-y+\frac{1}{2}=0$，$l_1$ 与 l_2 平行，故充分条件成立；当直线 $l_1:mx+2y+1=0$ 与直线 $l_2:\frac{1}{2}x-my+\frac{1}{2}=0$ 平行时，$m^2=1$，解得 $m=1$ 或 $m=-1$，当 $m=1$ 时，直线 $l_1:x+2y+1=0$ 与直线 $l_2:x+2y+1=0$ 重合，当 $m=-1$ 时，直线 $l_1:x-2y-1=0$，直线 $l_2:x-2y+1=0$ 平行，故充要条件成立. 故选 A.

8.C　设切线的切点坐标为 (x_0,y_0)，$y=\ln x-x^2$，$y'=\frac{1}{x}+2x$.

$y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}-2x_0=3$，解得 $\begin{cases}x_0=\frac{1}{2}\\ y_0=\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\end{cases}$，或 $\begin{cases}x_0=1\\ y_0=1\end{cases}$，所以切点坐标为 $(1,1)$ 或 $\left(\frac{1}{2},\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$，

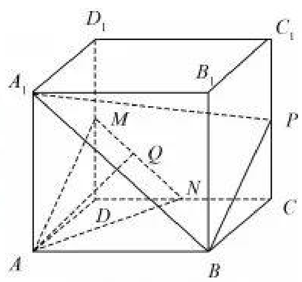
所求的切线方程为 $3x-y-2=0$ 或 $3x-y-\frac{5}{4}-\ln 2=0$. 故选 C.

9.D　由 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，可得 $x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$

当 $k=0$ 时，$x=\frac{\pi}{6}$，当 $k=1$ 时，$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$，

当 $k=-1$ 时，$x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{12}$，所以 $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$ 为 $f(x)$ 图象的一个对称中心，故选 D.

10.B　取 DD_1，DC 的中点分别为 M，N，连接 AM，MN，AN，则易证明 $AM/\!/BP$，因为 $AM\not\subset$ 平面 A_1BP，$BP\subset$ 平面 A_1BP，所以 $AM/\!/$ 平面 A_1BP，又因为 $A_1B/\!/MN$，$MN\not\subset$ 平面 A_1BP，$A_1B\subset$ 平面 A_1BP，所以 $MN/\!/$ 平面 A_1BP，$MN\cap AM=M$，所以平面 $A_1BP/\!/$ 平面 AMN，$AQ\subset$ 平面 AMN，所以 $AQ/\!/$ 平面 A_1BP，当 $AQ\perp MN$ 时，AQ 有最小值，则易求出 $AM=AN=\sqrt{5}$，$MN=\sqrt{2}$，Q 为 MN 的中



点，$AQ=\sqrt{AN^2-\left(\frac{MN}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 AQ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故选 B.

11. C　设 $M(m,n)$，因为点 M 在抛物线 $C:y^2=2px$ 上，所以 $n^2=2pm$，

以点 M 为圆心的圆与 C 的准线相切，所以 $m+\frac{p}{2}=5$，圆 M 与 x 轴相交的弦长为 6，所以 $3^2+n^2=5^2$，所以

$p^2-10p+16=0$，解得 $p=2$ 或 $p=8$，故选 C.

12. D　∵函数 $y=f(x+1)$ 的图关于直线 $x=-3$ 对称，

∴函数 $y=f(x)$ 的图关于直线 $x=-2$ 对称，

∴$f(-2+x)=f(-2-x)$.

∵对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 有 $f(x)+f(-x)=2$，

∴函数 $y=f(x)$ 的图象关于 $(0,1)$ 中心对称，

∴$f(-2+x+2)=f[-2-(x+2)]$，即 $f(x)=f(-4-x)=2-f(-x)$.

又∵$f(-4-x)+f(x+4)=2$，即 $f(-4-x)=2-f(x+4)$，

∴$f(x+4)=f(-x)$，

∴$f[(x+4)+4]=f[-(x+4)]=f(x)$，即 $f(x+8)=f(x)$，

∴$f(x)$ 的周期 $T=8$，∴$f(2\,022)=f(252\times8+6)=f(6)=f(2+4)=f(-2)=2-f(2)=2-(2+2)=-2$.

13. 6　$\left(x-\frac{1}{x}\right)^4$ 的通项为 $T_{r+1}=C_4^r x^{4-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=C_4^r\cdot(-1)^r\cdot x^{4-2r}$，令 $4-2r=0$，得 $r=2$，所以常数项为 $T_3=C_4^2\cdot(-1)^2=6$.

14. $\frac{13}{9}$　因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$.

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$. 因为 $\tan(\alpha-\beta)=-\frac{1}{3}$.

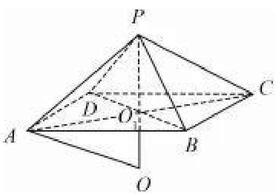
所以 $\tan\beta=\tan[\alpha-(\alpha-\beta)]=\frac{\tan\alpha-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan\alpha\cdot\tan(\alpha-\beta)}$

$$=\frac{\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{\frac{13}{12}}{\frac{3}{4}}=\frac{13}{9}.$$

15. $\frac{51}{40}$　如图所示，该四棱锥为 $P-ABCD$，底面中心为 O_1，外接球球心为 O，

设 $OO_1=d$，由题意 $OA=OP$，即 $\sqrt{d^2+\frac{9}{2}}=d+2$，解得 $d=\frac{1}{8}$，

因为△PBC 是等腰三角形，$BC=3$，BC 边上的高为 $\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\frac{5}{2}$，所以 $S_{\triangle PBC}=\frac{15}{4}$，



设点 O 到平面 PBC 的距离为 h，则三棱锥 $O-PBC$ 的体积为 $\frac{1}{3}S_{\triangle PBC}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle O_1BC}\cdot OP$，即 $\frac{15}{4}\times h=\frac{9}{4}\times\left(\frac{1}{8}+2\right)$，解得 $h=\frac{51}{40}$.

16. $\sqrt{2}x-y-3\sqrt{2}=0$ 或 $\sqrt{2}x+y-3\sqrt{2}=0$　设直线 l 的方程为 $y=k(x-3)$，

联立方程组 $\begin{cases}y=k(x-3),\\x^2-2y^2=6,\end{cases}$ 得 $(2k^2-1)x^2-12k^2x+18k^2+6=0$，

由$\begin{cases}2k^2-1\neq 0,\\144k^4-4(2k^2-1)(18k^2+6)>0,\\\dfrac{12k^2}{2k^2-1}>0,\\\dfrac{18k^2+6}{2k^2-1}>0,\end{cases}$

解得 $k^2>\frac{1}{2}$，即 $k>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{12k^2}{2k^2-1}$，$x_1x_2=\frac{18k^2+6}{2k^2-1}$，

因为 $y_1+y_2=k(x_1+x_2-6)=\frac{6k}{2k^2-1}$，

所以线段 AB 的中点为 $M\left(\frac{6k^2}{2k^2-1},\frac{3k}{2k^2-1}\right)$，

且 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{12k^2}{2k^2-1}\right)^2-\frac{24(3k^2+1)}{2k^2-1}}=\frac{2\sqrt{6}(k^2+1)}{2k^2-1}$.

设 $Q(0,y_0)$，因为 Q 在线段 AB 的垂直平分线上，所以 $\dfrac{y_0-\frac{3k}{2k^2-1}}{-\frac{6k^2}{2k^2-1}}=-\frac{1}{k}$.

得 $y_0=\frac{9k}{2k^2-1}$，即 $Q\left(0,\frac{9k}{2k^2-1}\right)$，故 $|QP|^2=\left(\frac{9k}{2k^2-1}\right)^2-12$.

因为 $|QA|^2=|QM|^2+\frac{1}{4}|AB|^2$，且 $|QA|=|QP|$，

所以 $\left(\frac{9k}{2k^2-1}\right)^2+12=\left(\frac{6k^2}{2k^2-1}\right)^2+\left(\frac{6k}{2k^2-1}\right)^2+\frac{6(k^2-1)^2}{(2k^2-1)^2}$，

化简得 $2k^4-5k^2+2=0$.

得 $k=\pm\sqrt{2}$ 或 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$（舍去），

所以直线 l 的方程为 $y=\pm\sqrt{2}(x-3)$，

即直线 l 的方程为 $\sqrt{2}x-y-3\sqrt{2}=0$ 或 $\sqrt{2}x+y-3\sqrt{2}=0$.

17.(1)解：由 $a_{n+1}=3a_n$，$a_1=1$，得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$，则$\{a_n\}$是等比数列，首项为 1，公比为 3，所以 $a_n=3^{n-1}$. ……… 4 分

(2)证明：由(1)知 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3^{n-1}}$，

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$， …………………………………………………… 7 分

又因为 $1-\frac{1}{3^n}<1$，

所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$. …………………………………………………………………… 10 分

18.解：(1)由正弦定理得 $\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\cos A+1}{\sqrt{3}\sin B}$，

因为 $\sin B\neq 0$，所以 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，即 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$. ……………………………………… 2 分

因为 $0<A<\pi$，所以 $-\frac{\pi}{6}<A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$． ………………………………… 6 分

(2)设△ABC 的外接圆半径为 R，则 $R=1$，$a=2R\sin A=\sqrt{3}$，

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=(b+c)^2-3bc$，即 $3=12-3bc$，

所以 $bc=3$，…………………………………………………………………………………… 8 分

所以△ABC 的面积为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{4}$． ………………………………………………… 10 分

19.(1)(ⅰ)因为 3 个产品选择甲方案，2 个产品选择乙方案，

所以 5 个产品全部测试合格的概率为 $P=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{128}$； ……………………………………… 2 分

(ⅱ)4 个产品测试合格分两种情况，

第一种情况，3 个产品甲方案测试合格和 1 个产品乙方案测试合格，

此时概率为 $P_1=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times C_2^1\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{64}$；…………………………………………………… 4 分

第二种情况，2 个产品甲方案测试合格和 2 个产品乙方案测试合格，

此时概率为 $P_2=C_3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$，

所以 4 个产品测试合格的概率为 $P_1+P_2=\frac{3}{64}+\frac{27}{128}=\frac{33}{128}$． …………………………………………… 6 分

(2)设选择甲方案测试的产品个数为 $n(n=0,1,2,3,4,5)$，则选择乙方案测试的产品个数为 $5-n$，并设通过甲方案测试合格的产品个数为 X，通过乙方案测试合格的产品个数为 Y，

当 $n=0$ 时，此时所有产品均选择方案乙测试，则 $Y\sim B\left(5,\frac{3}{4}\right)$，

所以 $E(X-Y)=E(Y)=5\times\frac{3}{4}=\frac{15}{4}>3$，符合题意；…………………………………………… 8 分

当 $n=5$ 时，此时所有产品均选择方案甲测试，则 $X\sim B\left(5,\frac{1}{2}\right)$，

所以 $E(X-Y)=E(X)=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}<3$，不符合题意；………………………………………… 10 分

当 $n=1,2,3,4$ 时，$X\sim B\left(n,\frac{1}{2}\right)$，$Y\sim B\left(5-n,\frac{3}{4}\right)$，

所以 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{1}{2}n+\frac{3(5-n)}{4}=\frac{15-n}{4}$，

若使，$E(X+Y)=\frac{15-n}{4}\geqslant 3$，解得 $n\leqslant 3$，则 $n=1,2,3$

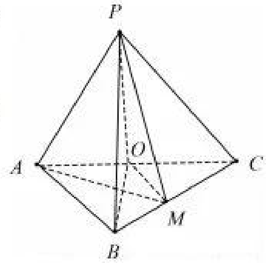
综上，选择甲方案测试的产品个数为 0，1，2，3 时，测试合格的产品个数的期望不小于 3． ………… 12 分

20.(1)证明：∵$PA=PC$，O 为 AC 的中点，∴$PO\perp AC$．

∵$AB=BC$，O 为 AC 的中点，∴$AC\perp OB$． ………………………………………… 2 分

∵$PO\perp AC$，$AC\perp OB$，$OB\cap PO=O$，OB，$PO\subset$平面 PBO，

∴$AC\perp$平面 PBO． ……………………………………………………………………… 4 分



(2)解：∵$AB\perp BC$，$AB=BC=2$，$PA=PB=PC=2\sqrt{2}$，O 为 AC 的中点，$AC=2\sqrt{2}$，

∴$BO=\sqrt{2}$，$PO=\sqrt{6}$，∴$PO^2+OB^2=PB^2$，∴$PO\perp OB$．

又∵$AC\perp OB$，$AC\cap PO=O$，AC，$PO\subset$平面 PAC，

$\therefore OB\perp$ 平面 PAC. …………………………………………………………………… 7 分

方法一：如图 2，作 $ME\perp AC$ 于点 E，$\therefore E$ 为 OC 的中点，作 $EF\perp PA$ 交 PA 于点 F，连接 MF.

$\therefore MF\perp PA$，

$\therefore \angle MFE$ 即为所求二面角 $M-PA-C$ 的平面角. ……………………………… 9 分

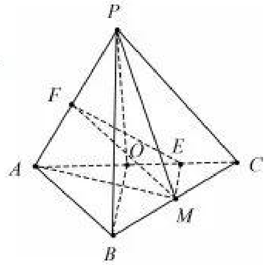


图 2

$\because ME=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$EF=\frac{\sqrt{3}}{2}AE=2\sqrt{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{6}}{4}$，

$\therefore \tan\angle MFE=\frac{ME}{EF}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{3\sqrt{6}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}$，

$\therefore \cos\angle MFE=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}=\frac{3\sqrt{93}}{31}$，$\sin\angle MFE=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}\right)^2}=\frac{2\sqrt{31}}{31}$. …………………………………… 12 分

方法二：分别以 OB，OC，OP 为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，如图 3.

$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$. $\therefore \overrightarrow{AM}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2},0\right)$，$\overrightarrow{PA}=(0,-\sqrt{2},-\sqrt{6})$. ……………… 8 分

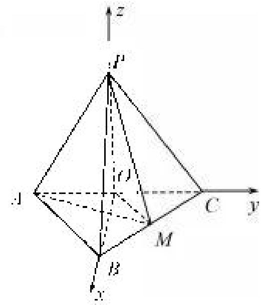


图 3

记 $n=(x,y,z)$ 为平面 AMP 的法向量，则

$\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{AM}=0 \\ n\cdot\overrightarrow{PA}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{3\sqrt{2}}{2}y=0\\ -\sqrt{2}y-\sqrt{6}z=0\end{cases}$，令 $z=1$，则 $x=3\sqrt{3}$，$y=-\sqrt{3}$，$n=(3\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$.

……………………………………………………………………………………… 10 分

平面 APC 的法向量 $m=(1,0,0)$.

易知二面角 $M-PA-C$ 的平面角为锐角记为 θ，$\cos\theta=|\cos\langle n,m\rangle|=\frac{|n\cdot m|}{|n|\cdot|m|}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}=\frac{3\sqrt{93}}{31}$，$\sin\theta=$

$\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}\right)^2}=\frac{2\sqrt{31}}{31}$. …………………………………………………………………… 12 分

21. (1)解：由题意可知 $c=\sqrt{2}$，当点 P 在上、下顶点时，$\angle F_1PF_2$ 最大，则 $b=c=\sqrt{2}$，

由 $a^2=b^2+c^2$ 得 $a^2=4$，所以椭圆 M 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ………………………………… 4 分

(2)证明：设直线 l 的方程为 $m(x-2)+ny=1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由椭圆 M 的方程 $x^2+2y^2=4$，得 $(x-2)^2+2y^2=-4(x-2)$. ………………………………… 6 分

联立直线 l 的方程与椭圆方程，得 $(x-2)^2+2y^2=-4(x-2)[m(x-2)+ny]$，

即 $(1+4m)(x-2)^2+4n(x-2)y+2y^2=0$，$(1+4m)\left(\frac{x-2}{y}\right)^2+4n\left(\frac{x-2}{y}\right)+2=0$. ……………… 8 分

所以 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{x_1-2}{y_1}+\frac{x_2-2}{y_2}=-\frac{4n}{1+4m}$. ……………………………………………… 9 分

因为直线 l 过定点 $(-2,-4)$，所以 $m+n=-\frac{1}{4}$，代入 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$，

得 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{x_1-2}{y_1}+\frac{x_2-2}{y_2}=-\frac{4n}{1+4m}=\frac{1+4m}{1+4m}=1$. ……………………………… 12 分

22. (1)解：$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\ln x-2ax$，由题意得 $f'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两解，

即 $\ln x-2ax=0$，即 $2a=\frac{\ln x}{x}$ 有两解.

令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$，即 $g(x)$ 的图象与直线 $y=2a$ 有两个交点. …………………………………… 2 分

$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$，得 $x=e$，当 $x\in(0,e)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，$\therefore g(x)_{\max}=g(e)=\dfrac{1}{e}$，$g(1)=0$，

当 x 趋于正无穷时，$g(x)$ 趋于零.

$\therefore 0<2a<\dfrac{1}{e}$，$\therefore 0<a<\dfrac{1}{2e}$，$\therefore a$ 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{2e}\right)$. …………………………………… 4 分

(2) $h(x)=x\ln x-2x+\dfrac{2}{x}(x>0)$，$h'(x)=\ln x-1-\dfrac{2}{x^2}$，令 $m(x)=\ln x-1-\dfrac{2}{x^2}$，则 $m'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}$，

当 $x>0$ 时，$m'(x)>0$，$\therefore h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. $\because h'(e)=-\dfrac{2}{e^2}<0$，$h'(e^2)=1-\dfrac{2}{e^4}>0$，

$\therefore$ 存在唯一的 $x_0\in(e,e^2)$，使得 $h'(x_0)=\ln x_0-1-\dfrac{2}{x_0^2}=0$，…………………………………… 6 分

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，$\therefore h(x)_{\min}=h(x_0)$. …………………………………… 7 分

又 $\because x_0\in(e,e^2)$，$h'(x_0)=0$，$\therefore \ln x_0-1-\dfrac{2}{x_0^2}=0$.

$\therefore h(x_0)=x_0\ln x_0-2x_0+\dfrac{2}{x_0}=\dfrac{2}{x_0}-x_0-\dfrac{2}{x_0}=-x_0-\dfrac{4}{x_0}<-e+\dfrac{1}{e}<0$. …………………………………… 9 分

又 $\because h(1)=0$，$h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上有一个零点. …………………………………… 10 分

$\because h(x)$ 在 $(x_0,-\infty)$ 上单调递增，且 $h(e^2)=\dfrac{2}{e^2}>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(x_0,-\infty)$ 上有一个零点. …………………………………… 11 分

综上可知，函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点. …………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。