2022 年广东省综合能力测试(三)数学

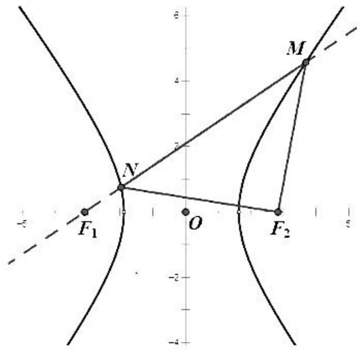
参考答案与评分标准

1. 【解析】B：由题知 $A=\{x|x<0\}$，$B=\{x|0<x<1\}$，故 $A\cap B=\varnothing$.

2.【解析】D：由题知 $z=\dfrac{1+i}{i}=1-i$，于是 $z^2-z\overline{z}=(1-i)^2-(1-i)(1+i)=-2-2i$，所以 $|z^2-z\overline{z}|=2\sqrt{2}$.

3.【解析】C：充分性：若 $k=0$，则 $y=1$，此时 $A(\sqrt{3},1)$，$B(-\sqrt{3},1)$，$|AB|=2\sqrt{3}$；必要性：若 $|AB|=2\sqrt{3}$，则圆心到直线的距离 $d=1$，则 $d=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=0$.

4.【解析】C：不妨设正六棱柱的棱长为 a，则 $V_1=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\times a=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^3$；其外接球的半径 $R=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+a^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$，于是 $V_2=\dfrac{4\pi}{3}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}a\right)^3=\dfrac{5\sqrt{5}}{6}\pi a^3$，则 $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{9\sqrt{15}}{25\pi}$.



5. 【解析】B：如图，设 $|MF_2|=m$，则 $|NF_2|=m$，$|MN|=\sqrt{2}m$，$|NF_1|=m-2a$，$|MF_1|=m-2a+\sqrt{2}m$，因为 $|MF_1|-|MF_2|=2a$，所以 $-2a+\sqrt{2}m=2a$，故 $m=2\sqrt{2}a$，在 ΔNF_1F_2 中，由余弦定理可知 $4c^2=(2\sqrt{2}a-2a)^2+8a^2-(2\sqrt{2}a-2a)\cdot2\sqrt{2}a\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，整理得 $4c^2=12a^2$，即 $e^2=3$，所以 $e=\sqrt{3}$.

6. 【解析】B：$C_5^2A_4^4=240$

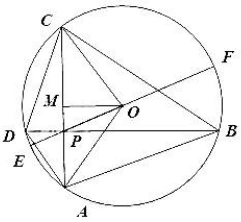
7. 【解析】D：因为 $\omega>0$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$t=\omega x-\dfrac{2\pi}{3}\in\left[-\dfrac{2\pi}{3},\pi\omega-\dfrac{2\pi}{3}\right]$，因为函数 $y=3\cos t$ 在 $\left[-\dfrac{2\pi}{3},\pi\omega-\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上有且只有 3 个零点，由图象可知 $\dfrac{3\pi}{2}\le\pi\omega-\dfrac{2\pi}{3}<\dfrac{5\pi}{2}$，解得 $\dfrac{13}{6}\le\omega<\dfrac{19}{6}$.

8.【解析】A：因为与 3^n 互素的数为 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, L L，3^n-1，共有 $2\times3^{n-1}$，所以 $\varphi(3^n)=2\times3^{n-1}$，则 $n\cdot\varphi(3^n)=2n\times3^{n-1}$，于是 $S_n=2\times3^0+4\times3^1+6\times3^2+\cdots+2n\times3^{n-1}$ ①，$3S_n=2\times3^1+4\times3^2+6\times3^3+\cdots+2n\times3^n$ ②，由①−②得 $-2S_n=2\times3^0+2\times3^1+2\times3^2+\cdots+2\times3^{n-1}-2n\times3^n=2\dfrac{1-3^n}{1-3}-2n\times3^n$，则 $S_n=\dfrac{2n-1}{2}3^n+\dfrac{1}{2}$，于是 $S_{10}=\dfrac{19}{2}\times3^{10}+\dfrac{1}{2}$.

9. 【解析】AD：由图可得，在一个生产周期内，机器正常的概率为 $\dfrac{20}{100}=0.2$，则至少有一个零件发生故障的概率为0.8，**A** 正确；有两个零件发生故障的概率为 $\dfrac{10+15+5}{100}=0.3$，只有一个零件发生故障的概率为 $\dfrac{15+20+10}{100}=0.45$，则有两个零件发生故障的概率比只有一个零件发生故障的概率更小，**B** 错误；乙

零件发生故障的概率为 $\dfrac{20+10+5+5}{100}=0.4$，甲零件发生故障的概率为 $\dfrac{15+10+15+5}{100}=0.45$，则乙零件发生故障的概率比甲零件发生故障的概率更小，**C** 错误；由图可知，丙和甲都故障的概率比乙和甲都故障的概率大，**D** 正确.

10.【解析】**ABD**；因为 $\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{DB}$ 上的投影向量是相反向量，则 $\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{DB}=0$，故 **A** 正确；



如图，设直线 PO 与圆 O 交于 E,F，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=-\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{PC}\right|$ $=-|EP||PF|=-\left(|OE|-|PO|\right)\cdot\left(|OE|+|PO|\right)=|PO|^2-|EO|^2=-2$，故 **B** 正确；取 AC 的中点 M，连接 OM，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC}\right)=$ $\overrightarrow{OM}^2-\overrightarrow{MC}^2=\overrightarrow{OM}^2-\left(4-\overrightarrow{OM}^2\right)=2\overrightarrow{OM}^2-4$，而 $0\le\overrightarrow{OM}^2\le|OP|^2=2$，

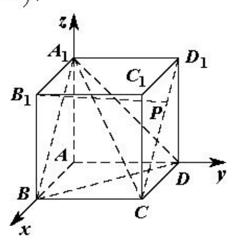
故 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ 的取值范围是 $[-4,0]$，故 **C** 错误；当 $AC\perp BD$ 时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PD}\right)=$ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=-\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CP}\right|-\left|\overrightarrow{PB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PD}\right|=-2|EP||PF|=-4$，故 **D** 正确.

11.【解析】**CD**；设 $f(x)=x+\mathrm{e}^x$，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，因为 $f(b)-f(\ln a)=b+\mathrm{e}^b-(\ln a+\mathrm{e}^{\ln a})=$ $a+\ln a-(\ln a+a)=0$，则 $b=\ln a$，设 $\dfrac{a}{b}=t$，则 $a=bt$，即 $b=\ln bt=\ln b+\ln t$，所以 $\ln t=b-\ln b$，

设 $g(x)=x-\ln x$，$g'(x)=1-\dfrac{1}{x}$，则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，$g(x)_{\min}=g(1)=1$，

即 $\ln t\ge 1$，所以 $t\ge\mathrm{e}$，即 $\dfrac{a}{b}\ge\mathrm{e}$，故 $\dfrac{a}{b}$ 的取值可以是 3 和 4.

12.【解析】**ABD**； **A** 选项：建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，则 $A(0,0,0)$，

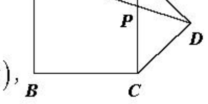


$B(1,0,0)$，$D(0,0,1)$，$C(1,1,0)$，$A_1(0,0,1)$，$C_1(1,1,1)$，$D_1(0,1,1)$，所以 $\overrightarrow{CD_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{B_1P}=\overrightarrow{B_1C}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{B_1C}+\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CC_1}=(-\lambda,1,\mu-1)$，易知平面 A_1BD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，若 B_1P // 平面 A_1BD，

则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1P}=0$，即 $\lambda=\mu$，则当 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{B_1P}\cdot\overrightarrow{CD_1}=\lambda+\mu-1=0$，

即 P 为 CD_1 中点时，有 B_1P // 平面 A_1BD，且 $B_1P\perp CD_1$，故 **A** 正确；**B** 选项：若 B_1P 与平面 CC_1D_1D 所成角为 $\dfrac{\pi}{4}$，则点 P 的轨迹是以 C_1 为圆心，以 1 为半径的 $\dfrac{1}{4}$ 个圆，于是点 P 的轨迹长度为 $\dfrac{\pi}{2}$，故 **B** 正确；

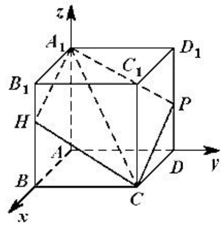
C 选项：如图，将平面 CDD_1 与平面 A_1BCD_1 沿 CD_1 展成平面图形，线段 A_1D 即为 $\left|\overrightarrow{DP}\right|+\left|\overrightarrow{A_1P}\right|$ 的最小值，



利用余弦定理可知 $A_1D=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，故 **C** 错误；**D** 选项：正方体经过点 A_1、P、C 的截面为平行四边形 A_1PCH，以 A 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，则 $A(0,0,0)$，$C(1,1,0)$，$A_1(0,0,1)$，$P(0,1,t)$，所以 $\overrightarrow{PC}=(1,0,-t)$，$\overrightarrow{A_1C}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{A_1C}=1+t$，$\left|\overrightarrow{PC}\right|=\sqrt{1+t^2}$，$\left|\overrightarrow{A_1C}\right|=\sqrt{3}$，所以点 P 到

直线 A_1C 的距离为 $d=\sqrt{\left|\overrightarrow{PC}\right|^2-\left(\frac{\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{A_1C}}{\left|\overrightarrow{A_1C}\right|}\right)^2}=\sqrt{1+t^2-\left(\frac{1+t}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{2t^2-2t+2}{3}}$，于是当 $t=\frac{1}{2}$ 时，ΔPA_1C 的面积取最小值，此时截面面积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$；当 $t=0$ 或1时，ΔPA_1C 的面积取最大值，此时截面面积为 $\sqrt{2}$，故 D 正确.



13.【解析】40；由题知 $3a_{n+1}=a_n$，则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}$. 于是数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1=27$ 为首项，以 $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列，则 $S_4=\frac{27\left(1-\frac{1}{3^4}\right)}{1-\frac{1}{3}}=40$.

14.【解析】$\frac{7\sqrt{2}}{10}$；原式 $=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[2\sin\alpha\cos\alpha-\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\right]=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}[\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}-(\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha})]=\frac{\sqrt{2}}{2}[\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}-(\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha})]=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

15.【解析】$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$（答案不唯一）；因为 $|PF_1|=6|PF_2|$，所以 $|PF_1|+|PF_2|=7|PF_2|=2a$，则 $|PF_2|=\frac{2a}{7}$.

又因为 $a-c\le|PF_2|\le a+c$，所以 $\frac{2a}{7}\ge a-c$，即 $\frac{c}{a}\ge\frac{5}{7}$. 根据题意可设 $C:\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$（$a>b>0$），则 $2b=4$，$b=2$，由 $\frac{c}{a}\ge\frac{5}{7}$，得 $\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\ge\frac{5}{7}$，解得 $a^2\ge\frac{49}{6}$.

16.【解析】(1) 2；(2) $\frac{7}{2}$；(1) $f(1+2x)-f(x)=1+2\log_2(2+2x)-1-2\log_2(1+x)=2\log_2 2=2$

(2) $f(m-1)=1+2\log_2[1+(m-1)]=1+2\log_2 m$，$f(n-2)=1+2\log_2[1+(n-2)]=1+2\log_2(n-1)$，

$f(m-1)+f(n-2)=f(n)-1$ 等价于 $1+2\log_2 m+1+2\log_2(n-1)=2\log_2(1+n)$，即 $\log_2[2m(n-1)]$ $=\log_2(1+n)$，故 $2m(n-1)=n+1$，其中 $m>0, n>1$. 所以 $2m+2n=\frac{n+1}{n-1}+2n=3+\frac{2}{n-1}+2(n-1)\ge$ $3+4\sqrt{\frac{1}{n-1}(n-1)}=7$，等号成立当且仅当 $n-1=\frac{1}{n-1}$，即 $n=2, m=\frac{3}{2}$ 时成立，故 $m+n$ 取最小值 $\frac{7}{2}$.

17.【解析】(1) 在 ΔABC 中，由正弦定理及 $2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$ 得：

$a^2-b^2-bc=c^2$，…………2分

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$，…………4分

又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. …………5分

(2) AD 是 ΔABC 的角平分线，$\angle BAD=\angle DAC=\frac{\pi}{3}$，

由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CAD}$可得$\frac{1}{2}bc\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}c\times AD\times\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}b\times AD\times\sin\frac{\pi}{3}$

因为$b=3$，$AD=2$，即有$3c=2c+6$，$c=6$，……………………………………………………8 分

故$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times3\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$.……………………………………………………10 分

18.【解析】(1)证明：在$\mathrm{Rt}\Delta ABC$中，$\tan\angle ACB=\frac{\sqrt{2}}{2}$，在$\mathrm{Rt}\Delta AOB$中，$\tan\angle ABO=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

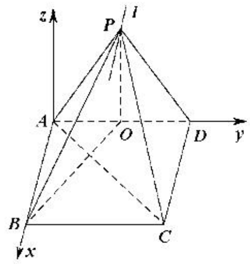
则$\angle ACB=\angle ABO$，于是$\angle ACB+\angle OBC=90^\circ$，

所以$AC\perp BO$.……………………………………………………2 分

因为$PO\perp$平面$ABCD$，则$AC\perp PO$；………………………………3 分

又$PO\cap BO=O$，所以$AC\perp$平面POB，……………………………4 分

而$AC\subset$平面PAC，所以$PAC\perp$平面POB.…………………………5 分



(2)因为$AB//CD$，$AB\not\subset$平面PCD，$CD\subset$平面PCD，

所以$AB//$平面PCD，……………………………………………………6 分

又平面$PAB\cap$平面$PCD=l$，$AB\subset$平面PCD，所以$l//AB$.………………………………………7 分

则l与平面PAC所成角的正弦值等于AB与平面PAC所成角的正弦值.…………………………8 分

以A为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系$A-xyz$，则$A(0,0,0)$，$P(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$，$B(2,0,0)$，

$C(2,2\sqrt{2},0)$，所以$\overrightarrow{AP}=(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AC}=(2,2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$.……………………………9 分

设平面PAC的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}\sqrt{2}y+\sqrt{2}z=0\\2x+2\sqrt{2}y=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x=-\sqrt{2}y\\z=-y\end{cases}$，

令$y=1$，得$\boldsymbol{n}=(-\sqrt{2},1,-1)$.……………………………………………………10 分

设l与平面PAC所成角为θ，则$\sin\theta=\left|\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{AB}>\right|=\frac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{|\boldsymbol{n}|\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{2\sqrt{2}}{2\times2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，…………………11 分

又因为$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$l$与平面$PAC$所成角为$\frac{\pi}{4}$.……………………………………………12 分

19.【解析】(1)当$n=1$时，$a_1a_2=4a_1-1$，解得$a_2=3$.……………………………………1 分

由题知$a_na_{n+1}=4S_n-1$……①　　$a_{n+1}a_{n+2}=4S_{n+1}-1$……②　………………………………2 分

由②－①得$a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=4a_{n+1}$，因为$a_n>0$，所以$a_{n+2}-a_n=4$　……………………3 分

于是：数列$\{a_n\}$的奇数项是以$a_1=1$为首项，以4为公差的等差数列；…………………………4 分

偶数项是以$a_2=3$为首项，以4为公差的等差数列；……………………………………………5 分

所以$\{a_n\}$的通项公式$a_n=2n-1$.……………………………………………………6 分

(2)由(1)可得$b_n=(-1)^n(2n-1)(2n+1)$.……………………………………………7 分

$T_n=-a_1a_2+a_2a_3-a_3a_4+a_4a_5\cdots\cdots+(-1)^na_na_{n+1}$…………………………………………8 分

$=a_2(-a_1+a_3)+a_4(-a_3+a_5)\cdots\cdots+(-1)^na_na_{n+1}$……………………………………………9 分

当 n 为偶数时，$T_n=4(a_2+a_4+\cdots\cdots+a_n)=4\dfrac{\frac{n}{2}(3+2n-1)}{2}=2n(n+1)$；……………………10 分

当 n 为奇数时，$T_n=4(a_2+a_4+\cdots\cdots+a_{n-1})-a_na_{n-1}$

$=4\dfrac{\frac{n-1}{2}(3+2n-3)}{2}-(2n-1)(2n+1)=-2n^2-2n+1$. ……………………11 分

综上，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\begin{cases}2n^2+2n, & n\text{为偶数}\\ -2n^2-2n+1, & n\text{为奇数}\end{cases}$. ……………………12 分

20.【解析】(1) X 的所有可能取值为 3, 2, 1, ……………………1 分

其分布列为

X	3	2	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

……………………4 分

(2) 方法一：设总得分为 Y，则 Y 的取值为 5, 4, 3, 2, ……………………5 分

则有

Y	5	4	3	2
P	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}$

……………………9 分

化简得 Y 的分布列为

Y	5	4	3	2
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

……………………11 分

所以 $E(Y)=5\times\frac{1}{20}+4\times\frac{11}{30}+3\times\frac{5}{12}+2\times\frac{1}{6}=3.3$. ……………………12 分

方法二：$E(X)=3\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}=2$ ……………………5 分

设第二局得分为 Y，则 Y 的取值为 2, 1 ……………………6 分

则有

Y	2	1
P	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$

……………………8 分

化简得 Y 的分布列为

Y	2	1

P	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$

……………………………………………10 分

$E(Y)=2\times\frac{3}{10}+1\times\frac{7}{10}=1.3$，……………………………………………11 分

四人赛总分期望为$E(X)+E(Y)=2+1.3=3.3$．……………………………………………12 分

21.【解析】（1）依题意：$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1\\ a^2-b^2=c^2\end{cases}$……………………………………………2 分

解得：$a^2=4,b^2=3$……………………………………………3 分

故椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$……………………………………………4 分

（2）设$B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，因为点B为椭圆E上异于左、右顶点的动点，

则直线BC不与x轴重合，设直线BC方程为$x=my+t$……………………………………………5 分

与椭圆方程联立得$\left(3m^2+4\right)y^2+6mty+3t^2-12=0$……………………………………………6 分

$\Delta=36m^2t^2-12\left(3m^2+4\right)\left(t^2-4\right)>0$，可得$t^2<3m^2+4$，

由韦达定理可得$y_1+y_2=-\frac{6mt}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{3t^2-12}{3m^2+4}$……………………………………………8 分

直线BA的方程为$y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，令$x=t$得点M纵坐标$y_M=\frac{y_1(t-2)}{x_1-2}$……………………………………………9 分

同理可得，点N纵坐标$y_N=\frac{y_2(t-2)}{x_2-2}$．

当O、A、M、N四点共圆，由割线定理可得$|PA|\cdot|PO|=|PM|\cdot|PN|$，即$t(t-2)=|y_My_N|$．

$$y_My_N=\frac{y_1y_2(t-2)^2}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{y_1y_2(t-2)^2}{(my_1+t-2)(my_2+t-2)}=\frac{y_1y_2(t-2)^2}{m^2y_1y_2+m(t-2)(y_1+y_2)+(t-2)^2}$$

$$=\frac{3\left(t^2-4\right)(t-2)^2}{3m^2\left(t^2-4\right)-6m^2t(t-2)+\left(3m^2+4\right)(t-2)^2}=\frac{3(t+2)(t-2)^2}{3m^2(t+2)-6m^2t+\left(3m^2+4\right)(t-2)}$$

$=\dfrac{3(t+2)(t-2)^2}{4(t-2)}=\dfrac{3}{4}(t+2)(t-2)$……11 分

由 $t>2$，故 $t(t-2)=\dfrac{3}{4}(t+2)(t-2)$，解得 $t=6$……12 分

22.【解析】(1) $f(x)=x^2-x+2\sin x$，$f'(x)=2x-1+2\cos x$ ……1

令 $g(x)=f'(x)=2x-1+2\cos x$，则 $g'(x)=2-2\sin x\geq 0$，

故 $g(x)=2x-1+2\cos x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，……2 分

因为 $f'(0)=1$，所以方程 $f'(x)=1$ 有唯一解 $x=0$ ……4 分

又 $f(0)=0$，则切点 $(0,0)$，即斜率为1的切线方程是 $y=x$. ……5 分

(2) $f'(x)=2x-a+2\cos x$，令 $g(x)=f'(x)=2x-a+2\cos x$

则 $g'(x)=2-2\sin x\geq 0$，故 $g(x)=2x-a+2\cos x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，……6 分

又 $g\left(\dfrac{a-3}{2}\right)=2\cdot\dfrac{a-3}{2}-a+2\cos\dfrac{a-3}{2}=-3+2\cos\dfrac{a-3}{2}<0$，

$g\left(\dfrac{a+3}{2}\right)=2\cdot\dfrac{a+3}{2}-a+2\cos\dfrac{a+3}{2}=3+2\cos\dfrac{a+3}{2}>0$，

故存在唯一实数 $x_0\in\left(\dfrac{a-3}{2},\dfrac{a+3}{2}\right)$，使 $g(x_0)=0$，……8 分

在区间 $(-\infty,x_0)$ 上，$g(x)=f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，

在区间 $(x_0,+\infty)$ 上，$g(x)=f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，

故 x_0 是 $f(x)$ 的唯一极值点，且为极小值点. ……9 分

又 $f(0)=0$，故 $f(x)$ 在区间 $(0,2\pi)$ 上有唯一零点等价于 $x_0>0$ 且 $f(2\pi)>0$，……10 分

故 $\begin{cases} f'(0)=-a+2<0 \\ f(2\pi)=(2\pi)^2-2\pi a>0 \end{cases}$，解得 $2<a<2\pi$，

所以实数 a 的取值范围为 $(2,2\pi)$. ……12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。