数学参考答案及评分意见

1.A 【解析】由 $x^2\leqslant 1$,即 $(x-1)(x+1)\leqslant 0$,解得 $-1\leqslant x\leqslant 1$,所以 $B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$,所以 $A\cup B=\{x|-1\leqslant x<2\}$.故选 A.

2.B 【解析】$z=\mathrm{i}(\mathrm{i}+1)=-1+\mathrm{i}$,则 $\bar{z}=-1-\mathrm{i}$,即 $|\bar{z}|=\sqrt{2}$,故选 B.

3.D 【解析】$f(-2)=(-2)^2-2\times(-2)=8$,$f(8)=\log_2 8=3$,故选 D.

4.C 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项和公差分别为 a_1,d,则 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$,所以 S_n 可看成关于 n 的二次函数,由二次函数图象的对称性及 $S_{20}=S_{24}$,$S_m=S_{26}$,可得 $\frac{20+24}{2}=\frac{26+m}{2}$,解得 $m=18$.故选 C.

5.A 【解析】$f(-x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}}{x^2+1}=-f(x)$,所以函数 $y=f(x)$ 是奇函数,排除 B 选项,又 $f(2)=\frac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-2}}{5}>1$,排除 C,D 选项,故选 A.

6.D 【解析】由等比数列的性质,可得 $m+n=8$,$\frac{9}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{8}(m+n)\left(\frac{9}{m}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{8}\left(10+\frac{m}{n}+\frac{9n}{m}\right)\geqslant\frac{1}{8}\left(10+2\sqrt{\frac{m}{n}\cdot\frac{9n}{m}}\right)=2$,当且仅当 $m=6$,$n=2$ 时,等号成立.因此,$\frac{9}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为 2.故选 D.

7.B 【解析】设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$,$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$,令 $g(x)=x\cos x-\sin x$,则 $g'(x)=-x\sin x$,

当 $x\in(0,\pi)$ 时,$g'(x)<0$,故 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上递减,$g(x)<g(0)=0$,$\therefore f'(x)<0$,故 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上递减,$\because 0<2<3<\pi$,

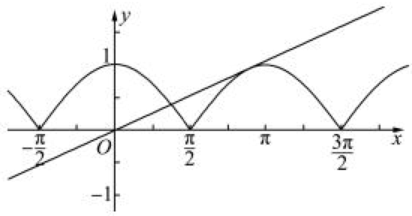
$\therefore f(3)<f(2)$,$\frac{\sin 3}{3}<\frac{\sin 2}{2}$,$2\sin 3<3\sin 2$,故 $c<b$,

$0<1<\pi-2<\pi$,$\frac{\sin(\pi-2)}{\pi-2}<\sin 1$,$\sin 2<(\pi-2)\sin 1$,$3\sin 2<3(\pi-2)\sin 1<4\sin 1$,故 $b<a$,

故 $c<b<a$,故选 B.

8.C 【解析】要使方程 $|\cos x|-kx=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的解,

则 $f(x)=|\cos x|$ 的图象与直线 $y=kx(k>0)$ 有且仅有两个公共点,



所以直线 $y=kx$ 与 $f(x)=|\cos x|$ 的图象在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 内相切,此时 $f(x)=|\cos x|=-\cos x$,

$f'(x)=\sin x$,设切点 $(\beta,-\cos\beta)$,

由 $\sin\beta=\frac{-\cos\beta-0}{\beta-0}\Rightarrow\tan\beta=-\frac{1}{\beta}$,

$\therefore\tan\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\beta-1}{1+\beta}$.

又由图可知 $|\cos\alpha|=k\alpha$,所以 $\cos\alpha=\alpha\sin\beta$,故 A、B 不正确.

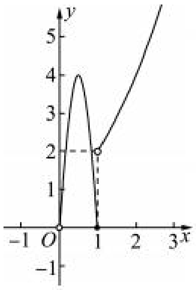
故选 C.

9.AD 【解析】∵命题 p 为真命题,∴不等式 $x^2-2x+m>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,∴$\Delta=4-4m<0$,解得 $m>1$,命题 p 为真命题的一个充分条件即所求范围 $\{m|m>1\}$ 的子集,故选 AD.

10.BD 【解析】根据线面的位置关系易知,A、C 中面 α 和面 β 可能相交也可能平行,由两个平面平行的判定定理可知 B 正确;若 $m\perp\alpha$ 且 $m\perp\beta$,根据面面平行的判定可知垂直于同一直线的两平面互相平行,故 D 正确,故选 BD.

11.BC 【解析】$f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$,结合图象,$f(x)$ 的值域是 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$,可知 a 的取值范围是 $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$.故选 BC.

12.ACD 【解析】作出函数 $f(x)$ 的大致图象，如图所示，



令 $t=f(x)$，则 $[f(x)]^2-(2-m)f(x)+1-m=0$ 可化为 $t^2-(2-m)t+1-m=(t-1+m)(t-1)=0$，

则 $t_1=1$ 或 $t_2=1-m$，则关于 x 的方程 $[f(x)]^2-(2-m)f(x)+1-m=0$ 的实数解等价于 $t=f(x)$ 的图象与直线 $t=t_1$，$t=t_2$ 的交点个数，

对于 A，当 $m=0$ 时，则 $t_1=t_2=1$，此时 $[f(x)]^2-2f(x)+1=0$ 有两个不相等的实数解，故 A 正确；

对于 B，$m>0$ 时，取 $m=2$，则 $t_1=1$ 或 $t_2=-1$，因为 $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$，故方程只有 2 个不相等的实数解，故 B 错误；

对于 C，$m<0$ 时，$t_2=1-m>1$，$y=t_2$ 与函数图象至少有 1 个交点，故 C 正确；

对于 D，若关于 x 的方程 $[f(x)]^2-(2-m)f(x)+1-m=0$ 恰有 5 个不同的实数解等价于 $t=f(x)$ 的图象与直线 $t=t_1$，$t=t_2$ 的交点个数之和为 5 个，由图可得函数 $t=f(x)$ 的图象与直线 $t=t_1$ 的交点个数为 2，所以 $t=f(x)$ 的图象与直线 $t=t_2$ 的交点个数为 3 个，即此时 $2<1-m<4$，解得 $-3<m<-1$，故 D 正确，故选 ACD.

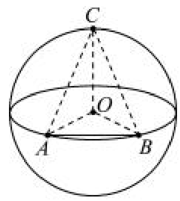
13.$-\frac{1}{2}$ 【解析】因为 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left[2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\pi\right]=-\cos\left[2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$.故答案为 $-\frac{1}{2}$.

14.$(-\infty,2)$ 【解析】设 $f(x)=x^2-6x+2$，图象开口向上，对称轴为直线 $x=3$，所以要使不等式 $x^2-6x+2-a>0$ 在区间 $[0,5]$ 内有解，只要 $a<f(x)_{\max}$ 即可，即 $a<f(0)=2$，得 $a<2$，所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty,2)$.

15.$(-2,+\infty)$ 【解析】当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=-n^2+2n+m-[-(n-1)^2+2(n-1)+m]=-2n+3$，

故可知当 $n\geqslant2$ 时，$\{a_n\}$ 单调递减，故 $\{a_n\}$ 为递减数列，只需满足 $a_2<a_1$，即 $-1<1+m\Rightarrow m>-2$.

16.$32\sqrt{3}\pi$ 【解析】如图所示，当点 C 位于垂直于面 AOB 的直径端点时，三棱锥 $O-ABC$ 的体积最大，设球 O 的半径为 R，此时 $V_{O-ABC}=V_{C-AOB}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}R^2\times R=\frac{\sqrt{3}}{12}R^3=6$，故 $R^3=24\sqrt{3}$，则球 O 的体积为 $V=\frac{4\pi R^3}{3}=32\sqrt{3}\pi$.



17.【解析】(1)在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $\log_2a_{n+1}-\log_2a_n=\log_2\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$， …… 1 分

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$， …… 2 分

即 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1=2$，公比为 2 的等比数列， …… 3 分

所以 $a_n=2\times2^{n-1}=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$. …… 4 分

(2)由 $(3n-2)a_n=(3n-2)\times2^n$，

故 $S_n=1\times2+4\times2^2+7\times2^3+\cdots+(3n-5)\times2^{n-1}+(3n-2)\times2^n$， …… 6 分

所以 $2S_n=1\times2^2+4\times2^3+7\times2^4+\cdots+(3n-5)\times2^n+(3n-2)\times2^{n+1}$， …… 7 分

则 $-S_n=2+3\times[2^2+2^3+\cdots+2^n]-(3n-2)\times2^{n+1}$ …… 8 分

$=-4+3\times\frac{2(1-2^n)}{1-2}-(3n-2)\times2^{n+1}=-10+(5-3n)\cdot2^{n+1}$， …… 9 分

故 $S_n=10+(3n-5)\cdot2^{n+1}$. …… 10 分

18.【解析】(1)由题意 $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}=1\times1+1\times(-1)+0\times1=0$，$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}=0\times1+2\times(-1)+2\times1=0$，

$\therefore\overrightarrow{AA_1}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AA_1}\perp\overrightarrow{AD}$，即 $AA_1\perp AB$，$AA_1\perp AD$. …… 2 分

$\because AB$，AD 是平面 $ABCD$ 内两相交直线，

$\therefore AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore$ 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是直四棱柱. …… 4 分

(2) $|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AA_1}|=1\times2\times1+2\times1\times1+0-1\times(-1)\times2-0-0=6$, …… 6 分

由题意 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AD}|=2\sqrt{2}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1\times0+1\times2+0\times2=2$,

$\cos\angle BAD=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$, 所以 $\sin\angle BAD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, …… 7 分

$S_{ABCD}=|AB|\cdot|AD|\cdot\sin\angle BAD=\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{AA_1}|=\sqrt{3}$, …… 8 分

$\therefore V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=S_{ABCD}\times|AA_1|=2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6$. …… 9 分

$\therefore |(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AA_1}|=V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}$. …… 10 分

猜想: $|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AA_1}|$ 的值表示以 AB, AD, AA_1 为邻边的平行六面体的体积. …… 12 分

19.**【解析】**(1)解法一:由题, $a\cos A+c\cos C=2b\cos B$,

由正弦定理得, $\sin 2B=\sin A\cos A+\sin C\cos C$, …… 1 分

$C=\dfrac{\pi}{4}$, $A+B+C=\pi$, $\sin 2B=\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-2A\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2A\right)=-\cos 2A$, …… 2 分

所以 $-\cos 2A=\sin A\cos A+\dfrac{1}{2}$, …… 3 分

$\sin^2A-\cos^2A-\sin A\cos A=\dfrac{1}{2}$, …… 4 分

$\dfrac{\tan^2A-1-\tan A}{\tan^2A+1}=\dfrac{1}{2}$, 化简得 $\tan^2A-2\tan A-3=0$, …… 5 分

解得 $\tan A=3$ 或 $\tan A=-1$(舍去). …… 6 分

解法二:由题, $a\cos A+c\cos C=2b\cos B$,

由正弦定理得, $2\sin 2B=\sin 2A+\sin 2C$, …… 1 分

即 $2\sin 2B=\sin[(A+C)+(A-C)]+\sin[(A+C)-(A-C)]$, …… 2 分

即 $\sin 2B=\sin(A+C)\cos(A-C)$, …… 3 分

又 $A+B+C=\pi$, 故 $\sin(A+C)=\sin B$,

所以 $2\sin B\cos B=\sin B\cos(A-C)$,

又 $0<B<\pi$, 故 $\sin B\neq0$,

所以 $2\cos B=\cos(A-C)$, …… 4 分

又 $A+B+C=\pi$, 故 $\cos B=-\cos(A+C)$,

化简得 $\sin A\sin C=3\cos A\cos C$, …… 5 分

因此 $\tan A\tan C=3$ 且 $\tan C=1$,

所以 $\tan A=3$. …… 6 分

(2)由(1)知 $\tan A=3$,

因此 $\tan B=-\tan(A+C)=-\dfrac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=2$, …… 7 分

所以 $\sin A=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$, …… 8 分

$\sin B=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, …… 9 分

$\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, …… 10 分

因为 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$, $a=6$, …… 11 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times6\times2\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=12$. …… 12 分

20.**【解析】**(1)由题,当 $n=1$ 时, $2a_1=(2-3)\cdot2^{1+1}+6=2$, 即 $a_1=1$. …… 1 分

$2a_1+2^2a_2+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}+2^na_n=(2n-3)\cdot2^{n+1}+6$①,

①—②得 $2^n a_n=(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6-(2n-5)\cdot 2^n-6=(2n-1)\cdot 2^n$，…… 5分

所以 $a_n=2n-1$. …… 6分

(2)由(1)知，$b_n=2^{a_n}+a_n=2^{2n-1}+2n-1$，

则 $T_n=(2+1)+(2^3+3)+(2^5+5)+\cdots+(2^{2n-1}+2n-1)$ …… 8分

$=(2+2^3+2^5+\cdots+2^{2n-1})+(1+3+5+\cdots+2n-1)$ …… 10分

$=\dfrac{2\times(1-4^n)}{1-4}+\dfrac{(1+2n-1)n}{2}=\dfrac{2^{2n+1}+3n^2-2}{3}$. …… 12分

21.【解析】(1)因为 $PB=PC$，O 是 BC 的中点，所以 $PO\perp BC$，…… 1分

在直角△POC 中，$PC=\sqrt{3}$，$OC=1$，所以 $PO=\sqrt{2}$.

在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$BC=2$，所以 $DO=\sqrt{2}$.

又因为 $PD=2$，所以在△POD 中，$PD^2=PO^2+OD^2$，即 $PO\perp OD$，…… 3分

而 $BC\cap OD=O$，BC，$OD\subset$平面 $ABCD$，所以 $PO\perp$平面 $ABCD$，…… 4分

而 $PO\subset$平面 PBC，所以平面 $PBC\perp$平面 $ABCD$. …… 5分

(2)由(1)知，$PO\perp$平面 $ABCD$，取 AD 中点 Q，连接 OQ，易知 OQ，OC，OP 两两相互垂直，

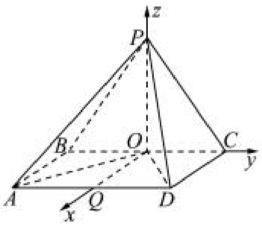
如图，分别以 OQ，OC，OP 为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，

则 $A(1,-1,0)$，$C(0,1,0)$，$D(1,1,0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，…… 7分

$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{CD}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,-1,\sqrt{2})$. …… 8分

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=0,\\ -y+\sqrt{2}z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，则 $y=\sqrt{2}$，所以 $\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{2},1)$，…… 10分



所以 $\cos\langle\overrightarrow{AD},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，…… 11分

所以直线 AD 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. …… 12分

22.【解析】(1)因为 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$， …… 1分

则 $f(1)=2$，$f'(1)=-2$，…… 2分

则切线方程为 $y-2=-2\times(x-1)$，即 $2x+y-4=0$. …… 3分

曲线 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $2x+y-4=0$. …… 4分

(2)若证 $f(x)<\dfrac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}+2$，即证 $f(x)-2=\dfrac{1}{x}-\ln x-1=\dfrac{1-x\ln x-x}{x}<\dfrac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}$. …… 5分

令 $g(x)=1-x-x\ln x$，$x>0$，则 $g'(x)=-2-\ln x$. …… 6分

当 $x\in(0,e^{-2})$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

当 $x\in(e^{-2},+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(e^{-2})=1+e^{-2}$，即 $1-x-x\ln x\leqslant 1+e^{-2}$. …… 7分

令 $h(x)=\ln(x+1)-x$，$x>0$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1=-\dfrac{x}{x+1}<0$，

可知 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，…… 8分

所以 $h(x)<h(0)=0$，即当 $x>0$ 时，$0<\ln(x+1)<x$，从而 $0<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\ln(x+1)}$，…… 9分

所以当 $0<x<1$ 时，$1-x-x\ln x>0$，$\dfrac{1-x-x\ln x}{x}\leqslant\dfrac{1+e^{-2}}{x}<\dfrac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}$，…… 10分

当 $x\geqslant 1$ 时，$1-x-x\ln x\leqslant 0$，$\dfrac{1-x-x\ln x}{x}\leqslant 0<\dfrac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}$，…… 11分

综上所述，对 $\forall x\in(0,+\infty)$，均有 $f(x)<\dfrac{1+e^{-2}}{\ln(x+1)}+2$. …… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。