

海淀区高三年级第二学期期中练习

数学(文科)

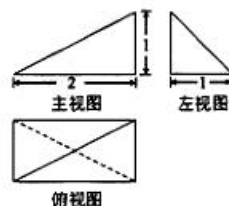
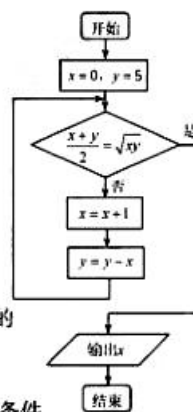
2017.4

学校_____班级_____姓名_____成绩_____

本试卷共4页,150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

1. 设集合 $A = \{x | 1 < x < 3\}$, 集合 $B = \{x | x^2 > 4\}$, 则集合 $A \cap B$ 等于
A. $\{x | 2 < x < 3\}$ B. $\{x | x > 1\}$ C. $\{x | 1 < x < 2\}$ D. $\{x | x > 2\}$
2. 圆心为 $(0,1)$ 且与直线 $y = 2$ 相切的圆的方程为
A. $(x-1)^2 + y^2 = 1$ B. $(x+1)^2 + y^2 = 1$
C. $x^2 + (y-1)^2 = 1$ D. $x^2 + (y+1)^2 = 1$
3. 执行如右图所示的程序框图,输出的 x 值为
A. 4 B. 3
C. 2 D. 1
4. 若实数 a, b 满足 $a > 0, b > 0$, 则“ $a > b$ ”是“ $a + \ln a > b + \ln b$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 某三棱锥的三视图如图所示,则该三棱锥中最长棱的长度为
A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{6}$
C. $2\sqrt{2}$ D. 3
6. 在 $\triangle ABC$ 中,点 D 满足 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, 则
A. 点 D 不在直线 BC 上 B. 点 D 在 BC 的延长线上
C. 点 D 在线段 BC 上 D. 点 D 在 CB 的延长线上

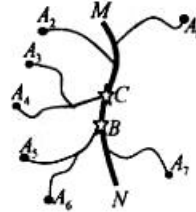




7. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq a, \\ \frac{1}{x}, & x > a \end{cases}$ 的值域为 $[-1, 1]$, 则实数 a 的取值范围是

- A. $[1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1]$ C. $(0, 1]$ D. $(-1, 0)$

8. 如图, 在公路 MN 两侧分别有 $A_1, A_2, \dots, A_7$ 七个工厂, 各工厂与公路 MN (图中粗线) 之间有小公路连接. 现在需要在公路 MN 上设置一个车站, 选择站址的标准是“使各工厂到车站的距离之和越小越好”. 则下面结论中正确的是



- ① 车站的位置设在 C 点好于 B 点;
② 车站的位置设在 B 点与 C 点之间公路上任何一点效果一样;
③ 车站位置的设置与各段小公路的长度无关.

- A. ① B. ② C. ①③ D. ②③

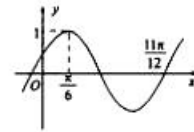
二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

9. 已知复数 $z = a(1+i) - 2$ 为纯虚数, 则实数 $a =$ _____.

10. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 a_4 = a_5$, $a_4 = 8$, 则公比 $q =$ _____, 其前 4 项和 $S_4 =$ _____.

11. 若抛物线 $y^2 = 2px$ 的准线经过双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左焦点, 则实数 $p =$ _____.

12. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x + 2y - 4 \leq 0, \\ x - 2y \leq 0, \\ x \geq 1, \end{cases}$ 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值是 _____.



13. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x$ ($\omega > 0$), 若函数 $y = f(x+a)$ ($a > 0$) 的部分图象如图所示, 则 $\omega =$ _____, a 的最小值是 _____.

14. 阅读下列材料, 回答后面问题:

在 2014 年 12 月 30 日 CCTV13 播出的“新闻直播间”节目中, 主持人说: “……假如此次亚航失联航班 QZ8501 被证实失事的话, 2014 年航空事故死亡人数将达到 1320 人。尽管如此, 航空安全专家还是提醒人们: 飞机仍是相对安全的交通工具。① 世界卫生组织去年公布的数据显示, 每年大约有 124 万人死于车祸, 而即使在航空事故死亡人数最多的一年, 也就是 1972 年, 其死亡数字也仅为 3346 人; ② 截至 2014 年 9 月, 每百万架次中有 2.1 次 (指飞机失事), 乘坐汽车的百万人中其死亡人数在 100 人左右。”

对上述航空专家给出的 ①、② 两段表述 (划线部分), 你认为不能够支持“飞机仍是相对安全的交通工具”的所有表述序号为 _____, 你的理由是 _____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15. (本小题满分 13 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 = 6, a_2 + a_3 = 10$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 的前 n 项和.

16. (本小题满分 13 分)

某地区以“绿色出行”为宗旨开展“共享单车”业务. 该地有 a, b 两种“共享单车”(以下简称 a 型车, b 型车). 某学习小组 7 名同学调查了该地区共享单车的使用情况.

(I) 某日该学习小组进行一次市场体验, 其中 4 人租到 a 型车, 3 人租到 b 型车. 如果从组内随机抽取 2 人, 求抽取的 2 人中至少有一人在市场体验过程中租到 a 型车的概率;

(II) 根据已公布的 2016 年该地区全年市场调查报告, 小组同学发现 3 月, 4 月的用户租车情况呈现下表使用规律. 例如, 第 3 个月租 a 型车的用户中, 在第 4 个月有 60% 的用户仍租 a 型车.

第 3 个月 \ 第 4 个月	租用 a 型车	租用 b 型车
	租用 a 型车	租用 b 型车
租用 a 型车	60%	50%
租用 b 型车	40%	50%

若认为 2017 年该地区租用单车情况与 2016 年大致相同. 已知 2017 年 3 月该地区租用 a, b 两种车型的用户比例为 1:1, 根据表格提供的信息, 估计 2017 年 4 月该地区租用两种车型的用户比例.

17. (本小题满分 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $A = 2B$.

(I) 求证: $a = 2b \cos B$;

(II) 若 $b = 2, c = 4$, 求 B 的值.



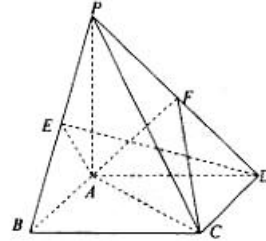
18. (本小题满分 14 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = AB = 2$, E, F 分别是 PB, PD 的中点.

(I) 求证: $PB \parallel$ 平面 FAC ;

(II) 求三棱锥 $P-EAD$ 的体积;

(III) 求证: 平面 $EAD \perp$ 平面 FAC .



19. (本小题满分 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A, B , 且 $|AB| = 4$, 离心

率为 $\frac{1}{2}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设点 $Q(4, 0)$, 若点 P 在直线 $x = 4$ 上, 直线 BP 与椭圆交于另一点 M . 判断是否存在点 P , 使得四边形 $APQM$ 为梯形? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.

20. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = e^x - x^2 + ax$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线与 x 轴平行.

(I) 求 a 的值;

(II) 若 $g(x) = e^x - 2x - 1$, 求函数 $g(x)$ 的最小值;

(III) 求证: 存在 $c < 0$, 当 $x > c$ 时, $f(x) > 0$.



海淀区高三年级第二学期期中练习参考答案

数学(文科) 2017.4

一、选择题(本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	C	C	B	D	A	C

二、填空题(本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 有两空的小题, 第一空 3 分, 第二空 2 分, 共 30 分)

9. 2	10. 2, 15	11. 4	12. $\frac{3}{2}$	13. $2, \frac{\pi}{12}$
14. 选①, 数据①虽是同类数据, 但反映不出乘车出行和乘飞机出行的总人数的关系; 选②, 数据②两个数据不是同一类数据, 这与每架次飞机的乘机人数有关 不选②, 数据②两个数据虽表面不是同一类数据, 但是可以做如下大致估算, 考虑平均每架次飞机的乘机人数为 x, 这样每百万人乘机死亡人数 2.1 人, 要远远少于乘车每百万人中死亡人数. 说明: 只要对两个数据言之有理, 就给 5 分. 若是只选了一个, 且对数据进行了合理说明, 给 3 分.				

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 80 分)

15. 解:

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

因为 $a_1 + a_2 = 6$, $a_3 + a_4 = 10$, 所以 $a_4 - a_1 = 4$, 1 分

所以 $3d = 4$, $d = 2$ 2 分

又 $a_1 + a_2 + d = 6$, 所以 $a_1 = 2$, 1 分

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n$ 2 分



(II) 记 $b_n = a_n + a_{n+1}$

所以 $b_n = 2n + 2(n+1) = 4n + 2$ 2 分

又 $b_{n+1} - b_n = 4(n+1) + 2 - 4n - 2 = 4$,

所以 $\{b_n\}$ 是首项为 6，公差为 4 的等差数列，2 分

共前 n 项和 $S_n = \frac{n(b_1 + b_n)}{2}$ 2 分

$= \frac{n(6 + 4n + 2)}{2} = 2n^2 + 4n$ 1 分

(6) 解:

(I) 法 1: 依题意记租到 a 型车的 4 人为 A_1, A_2, A_3, A_4

租到 b 型车的 3 人为 B_1, B_2, B_3

设事件 A 为“7 人中抽到 2 人，至少有一人租到 a 型车”，1 分

则事件 $\bar{A}$ 为“7 人中抽到 2 人都租到 b 型车”，1 分

如表格所示，从 7 人中抽出 2 人共有 21 种情况，2 分

	A_1	A_2	A_3	A_4	B_1	B_2	B_3
A_1							
A_2	✓						
A_3	✓	✓					
A_4	✓	✓	✓				
B_1	✓	✓	✓	✓			
B_2	✓	✓	✓	✓	✓		
B_3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	

事件 $\bar{A}$ 发生共有 3 种情况，1 分

所以事件 A 概率 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{21} = \frac{6}{7}$ 2 分

法 2: 依题意记租到 a 型车的 4 人为 A_1, A_2, A_3, A_4

租到 b 型车的 3 人为 B_1, B_2, B_3

设事件 A 为“7 人中抽到 2 人，至少有一人租到 a 型车”，1 分

事件 A 包含两类情形：2 人都租到 a 型车；一人租用 a 型车，一人租用 b 型车。两类情形共有 18 种情况，2 分

从 7 人中抽出 2 人共有 21 种情况，2 分

所以事件 A 发生的概率 $P(A) = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$ 2 分

(II) 依题意，市场 4 月份租用 a 型车的比例为 $50\% \cdot 60\% + 50\% \cdot 50\% = 55\%$ ，2 分



租用 b 型车的比例为 $50\% \cdot 40\% + 50\% \cdot 50\% = 45\%$ ，-----2 分

所以市场 4 月租用 a, b 型车的用户比例为 $\frac{55\%a}{45\%b} = \frac{11}{9}$ ，-----2 分

{说明：如果学生假设 a 型车和 b 型车的具体数值，然后计算数值再求比例，不扣分}

17 解：

(1) 因为 $A = 2B$ ，

所以由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，-----2 分

得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin 2B}$ ，-----1 分

得 $\frac{a}{2 \sin B \cos B} = \frac{b}{\sin B}$ ，-----2 分

所以 $a = 2b \cos B$ ，-----2 分

(II) 法 1：由余弦定理， $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ，-----2 分

因为 $b = 2, c = 4$ ，

所以 $4 = 16 \cos^2 B + 14 - 32 \cos^2 B$ ，-----1 分

所以 $16 \cos^2 B = 12$ ，即 $\cos^2 B = \frac{3}{4}$ ，-----1 分

因为 $A + B = 2B + B < \pi$ ，所以 $B < \frac{\pi}{3}$ ，-----1 分

{或因为 $b < c$ ，所以 $B < \frac{\pi}{2}$ ；}

所以 $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，所以 $B = \frac{\pi}{6}$ ，-----1 分

法 2：由余弦定理， $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ，-----2 分

因为 $b = 2, c = 4, A = 2B$ ，

所以 $16 \cos^2 B = 4 + 16 - 16 \cos 2B$ ，-----1 分

所以 $\cos^2 B = \frac{3}{4}$ ，-----1 分

因为 $A + B = 2B + B < \pi$ ，所以 $B < \frac{\pi}{3}$ ，-----1 分



所以 $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，所以 $B = \frac{\pi}{6}$ 1 分

法 3：因为 $a = 2b \cos B$ ，

所以由余弦定理， $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ，2 分

可得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \frac{a}{2b}$ ，即 $b^2 = a^2 + c^2 - \frac{a^2 c}{b}$ ，

又因为 $b = 2, c = 4$ ，所以计算可得 $a^2 = 12$ ，即 $a = 2\sqrt{3}$ ，1 分

因为 $a^2 + b^2 = c^2$ ，所以 $\angle C = 90^\circ$ ，1 分

所以 $\cos B = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，1 分

所以 $B = \frac{\pi}{6}$ ，1 分

法 4：因为 $a = 2b \cos B$ ，根据余弦定理 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ ，可得

$$a = 2b \times \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}， \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

又因为 $b = 2, c = 4$ ，所以计算可得 $a^2 = 12$ ，即 $a = 2\sqrt{3}$ ，1 分

因为 $a^2 + b^2 = c^2$ ，所以 $\angle C = 90^\circ$ ，1 分

所以 $\cos B = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，1 分

所以 $B = \frac{\pi}{6}$ ，1 分

18.解：

(1) 连接 BD ，与 AC 交于点 O ，连接 OF ，1 分

在 $\triangle PBD$ 中， O, F 分别是 BD, PD 中点，

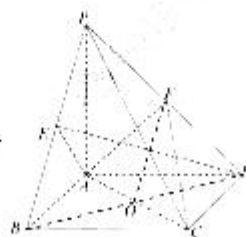
所以 $OF \parallel PB$ ，1 分

又因为 $OF \subset$ 平面 FAC ，1 分 $PB \not\subset$ 平面 FAC ，1 分

所以 $PB \parallel$ 平面 FAC ，1 分

[说明：本题下面过程中的标灰部分不写不扣分]

(II) 法 1：因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB, AD \subset$ 平面 $ABCD$ ，





所以 $PA \perp AB$, $PA \perp AD$,1 分

又因为 $AB \perp AD$, $PA \cap AB = A$, $PA, AB \subset$ 平面 PAB ,

所以 $AD \perp$ 平面 PAB ,1 分

在直角 $\triangle PAB$ 中, $PA = AB = 2$, E 为 PB 中点,

所以 $S_{\triangle PAE} = 1$,

所以三棱锥 $P-EAD$ 的体积为 $V_{P-EAD} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle PAE} \times AD = \frac{2}{3}$2 分

[说明 1: 最后一行的体积公式 1 分, 数值结果 1 分]

法 2: 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 PA 为棱锥 $P-ABD$ 的高,1 分

因为 $PA = AB = 2$, 底面 $ABCD$ 是正方形,

所以 $V_{P-ABD} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle ABD} \times PA = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$,1 分

因为 E 为 PB 中点, 所以 $S_{\triangle PAE} = S_{\triangle ABE}$,1 分

所以 $V_{P-EAD} = \frac{1}{2} \times V_{P-ABD} = \frac{2}{3}$1 分

(III) 证明:

因为 $AD \perp$ 平面 PAB , $PB \subset$ 平面 PAB ,

所以 $AD \perp PB$,1 分

在等腰直角 $\triangle PAB$ 中, $AE \perp PB$,1 分

又 $AE \cap AD = A$, $AE, AD \subset$ 平面 EAD ,

所以 $PB \perp$ 平面 EAD ,1 分

又 $OF \parallel PB$,

所以 $OF \perp$ 平面 EAD ,1 分

又 $OF \subset$ 平面 FAC ,1 分

所以平面 $EAD \perp$ 平面 FAC .

19. 解:



(1) 由 $|AB|=4$, 得 $a=2$ 1 分

又因为 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$,1 分

所以 $c=1$,1 分

所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$1 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$1 分

(II) 法 1: 假设存在点 P , 使得四边形 $APQM$ 为梯形.

由题可知, 显然 AM, PQ 不平行, 所以 AP 与 MQ 平行, $k_{AP} = k_{MQ}$1 分

设点 $P(4, y_0)$, $M(x_1, y_1)$, $k_{AP} = \frac{y_0}{6}$, $k_{MQ} = \frac{y_1}{x_1 - 4}$1 分

则 $\frac{y_0}{6} = \frac{y_1}{x_1 - 4}$ ①1 分

直线 PB 方程为 $y = \frac{y_0}{2}(x - 2)$,1 分

由点 M 在直线 PB 上, 则 $y_1 = \frac{y_0}{2}(x_1 - 2)$ ②1 分

①②联立, $\frac{y_0}{6} = \frac{\frac{y_0}{2}(x_1 - 2)}{x_1 - 4}$, 显然 $y_0 \neq 0$, 可解得 $x_1 = 1$1 分

又由点 M 在椭圆上, $\frac{1}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1$, 所以 $y_1 = \pm \frac{3}{2}$,1 分

即 $M(1, \pm \frac{3}{2})$, 将其代入①, 解得 $y_0 = \pm 3$,1 分

所以 $P(4, \pm 3)$1 分

法 2: 假设存在点 P , 使得四边形 $APQM$ 为梯形.

由题可知, 显然 AM, PQ 不平行, 所以 AP 与 MQ 平行, $k_{AP} = k_{MQ}$1 分

显然直线 MB 存在斜率且斜率不为 0, 设 $M(x_1, y_1)$.

设直线 MB 方程为 $x = ty + 2$ ($t \neq 0$).



$$\text{由 } \begin{cases} x = t + 2 \\ 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \end{cases} \text{ 得 } (3t^2 + 4)y^2 + 12ty = 0, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \Delta > 0, \text{ 得 } t \neq 0. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } B(2,0), \text{ 所以 } y = \frac{-12t}{3t^2 + 4}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$x_1 = t + 2 = \frac{6t^2 + 8}{3t^2 + 4},$$

$$\text{所以 } M\left(\frac{6t^2 + 8}{3t^2 + 4}, \frac{-12t}{3t^2 + 4}\right). \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ x = 4 \end{cases}, \text{ 所以 } P\left(4, \frac{2}{t}\right). \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } k_{AP} = k_{MQ}, \text{ 所以 } \frac{2}{6} = \frac{\frac{3t^2 + 4}{-6t^2 + 8} - \frac{12t}{-4}}{\frac{6t^2 + 8}{3t^2 + 4} - 4}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } t = \pm \frac{2}{3}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } P(4, \pm 3). \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

法 3：假设存在点 P ，使得四边形 $APQM$ 为梯形。

$$\text{由题可知，显然 } AM, PQ \text{ 不平行，所以 } AP \text{ 与 } MQ \text{ 平行，} k_{AP} = k_{MQ}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

显然直线 AP 斜率存在，设直线 AP 方程为 $y = k(x + 2)$

$$\text{则 } \begin{cases} y = k(x + 2) \\ y = 4 \end{cases}, \text{ 所以 } y = 6k, \text{ 所以 } P(4, 6k), \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } B(2,0), \text{ 所以 } k_{BP} = \frac{6k}{2} = 3k. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{所以直线 } PB \text{ 方程为 } y = 3k(x - 2), \begin{cases} y = 3k(x - 2) \\ 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\text{消 } y, (12k^2 + 1)x^2 - 48k^2x + 48k^2 - 4 = 0 \text{ 显然 } \Delta > 0 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } B(2,0), \text{ 所以 } 2 + x_1 = \frac{48k^2}{12k^2 + 1}, \text{ 即 } x_1 = \frac{24k^2 - 2}{12k^2 + 1}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$



$$\text{所以 } y_1 = 3k(x_1 - 2) = \frac{-12k}{12k^2 + 1},$$

$$\text{所以 } M\left(\frac{24k^2 - 2}{12k^2 + 1}, \frac{-12k}{12k^2 + 1}\right), \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{由 } k_{AP} = k_{MP} \text{ 可得 } \frac{6k}{6} = \frac{\frac{-12k}{12k^2 + 1}}{\frac{24k^2 - 2}{12k^2 + 1} - 4}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } k = \pm \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } M(1, \pm \frac{3}{2}), P(4, \pm 3), \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

法 4: 假设存在点 P , 使得四边形 $APQM$ 为梯形.

由题可知, 显然 AM, PQ 不平行, 所以 AP 与 MQ 平行, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$$\text{所以 } \frac{|BQ|}{|AB|} = \frac{|BM|}{|BP|}, \text{ 所以 } \frac{|BM|}{|BP|} = \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

设点 $M(x, y_1), P(4, t)$.

$$\text{过点 } M \text{ 作 } MH \perp AB \text{ 于 } H, \text{ 则有 } \frac{|BH|}{|BQ|} = \frac{|BM|}{|BP|} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } |BH| = 1, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } H(1, 0), \text{ 所以 } x_1 = 1, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{代入椭圆方程, 求得 } y_1 = \pm \frac{3}{2} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } P(4, \pm 3), \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

20. 解:

$$(I) f'(x) = e^x - 2x + a, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{由已知可得 } f'(0) = 0, \text{ 所以 } 1 + a = 0, \text{ 得 } a = -1, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$(II) g'(x) = e^x - 2, \text{ 令 } g'(x) = 0, \text{ 得 } x = \ln 2, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

所以 $x, g'(x), g(x)$ 的变化情况如下表所示:



x	$(-\infty, \ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

2 分

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \ln 2 - 1 = 1 - 2 \ln 2$. 1 分

(III) 证明：显然 $g(x) = f'(x)$ 且 $g(0) = 0$. 1 分

由 (II) 知， $g(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增.

又 $g(\ln 2) < 0$ ， $g(2) = e^2 - 5 > 0$. 1 分

由零点存在定理，存在唯一实数 $x_1 \in (\ln 2, +\infty)$ ，满足 $g(x_1) = 0$.

即 $e^{x_1} - 2x_1 - 1 = 0$ ， $e^{x_1} = 2x_1 + 1$. 1 分

综上， $g(x) = f'(x)$ 存在两个零点，分别为 0， x_1 .

所以

$x < 0$ 时， $g(x) > 0$ ，即 $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增；

$0 < x < x_1$ 时， $g(x) < 0$ ，即 $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减；

$x > x_1$ 时， $g(x) > 0$ ，即 $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(0)$ 是极大值， $f(x_1)$ 是极小值. 1 分

$$f(x_1) = e^{x_1} - x_1^2 - x_1 = 2x_1 + 1 - x_1^2 - x_1 = -x_1^2 + x_1 + 1 = -\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}.$$

因为 $g(1) = e - 3 < 0$ ， $g\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} - 4 > 0$ ，

所以 $x_1 \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$ ，所以 $f(x_1) > 0$. 1 分

因此 $x \geq 0$ 时， $f(x) > 0$. 1 分

因为 $f(0) = 1$ 且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，

所以一定存在 $c < 0$ 满足 $f(c) > 0$ ，-----1 分

所以存在 $c < 0$ ，当 $x > c$ 时， $f(x) > 0$ 。



扫描二维码，关注自主招生官方微信！

查看更多自主招生相关资讯！