2022～2023 学年度第一学期期末学业水平诊断

高三数学参考答案及评分标准

一、选择题

DBBC　ACDA

二、选择题

9. BC　10. ACD　11. ACD　12. ABD

三、填空题

13. 1　14. $\frac{3}{2}$　15. 67　16. $\frac{1}{2}$

四、解答题

17. 解：（1）由正弦定理可得 $\sin A\cos C+\sin A\sin C=\sin B$， ………………………1 分

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin A\cos C+\sin A\sin C=\sin(A+C)$，

即 $\sin A\cos C+\sin A\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C$， ………………………2 分

整理得：$\sin A\sin C=\cos A\sin C$，

因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C\neq 0$，所以 $\tan A=1$，

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{4}$. ………………………………………………4 分

（2）在 ΔABD 中，由余弦定理得：$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A$， ……5 分

即 $9=AB^2+AD^2-\sqrt{2}AB\cdot AD\geq(2-\sqrt{2})AB\cdot AD$， ………………………6 分

整理得 $AB\cdot AD\leq\frac{9(2+\sqrt{2})}{2}$，当且仅当 $AB=AD$ 时，等号成立.

所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}AB\cdot AD\leq\frac{9(\sqrt{2}+1)}{4}$， ………………………8 分

因为 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DC}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{3}{2}S_{\triangle ABD}\leq\frac{27(\sqrt{2}+1)}{8}$，

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{27(\sqrt{2}+1)}{8}$. ………………………………10 分

18. 解：（1）因为 $a_na_{n+1}=2S_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $a_{n-1}a_n=2S_{n-1}\,(n\geq 2)$，

两式相减得 $a_n(a_{n+1}-a_{n-1})=2a_n\,(n\geq 2)$. ………………………………1 分

又因为 $a_n \neq 0$，所以 $a_{n+1} - a_{n-1} = 2(n \geq 2)$， ………………………………………… 2 分

所以数列 $\{a_{2n-1}\}$ 和 $\{a_{2n}\}$ 都是以 2 为公差的等差数列.

因为 $a_1 = 1$，所以在 $a_n a_{n+1} = 2S_n$ 中，令 $n = 1$，得 $a_2 = 2$，

所以 $a_{2n-1} = 1 + 2(n-1) = 2n-1$, $a_{2n} = 2 + (n-1) \times 2 = 2n$, ………………………… 3 分

所以 $a_n = n$， ……………………………………………………………………………… 4 分

对于数列 $\{b_n\}$，因为 $b_{n+1} = b_1 \cdot b_n = 2b_n$，且 $b_n \neq 0$，所以 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 2(n \in \mathbf{N}^*)$， ………… 6 分

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $b_n = 2^n$. ………………… 7 分

（2）因为 $T_n = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \ldots + n \times 2^n$

所以 $2T_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \cdots + (n-1) \times 2^n + n \times 2^{n+1}$ ……………… 8 分

两式相减得，$-T_n = 2 + 2^2 + \cdots + 2^n - n \times 2^{n+1}$ …………………………………… 9 分

$$= \frac{2 - 2^{n+1}}{1-2} - n \times 2^{n+1}$$

$= -2 - (n-1) \times 2^{n+1}$ ……………………………………………………………… 11 分

所以 $T_n = (n-1) \times 2^{n+1} + 2$. ………………………………………………………… 12 分

19. 解：（1）证明：取 BC 中点 O，连接 OA, OD，

因为 ΔABC 是以 BC 为斜边的等腰直角三角形，所以 $OA \perp BC$. …………………… 1 分

因为 ΔBCD 是等边三角形，所以 $OD \perp BC$. ………………………………………… 2 分

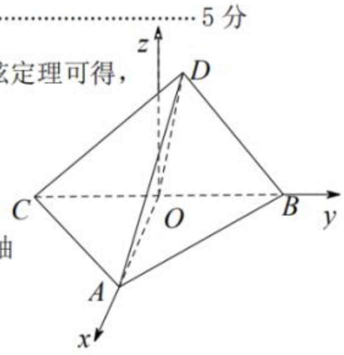
$OA \cap OD = O$，$OA \subset$ 平面 AOD，$OD \subset$ 平面 AOD， …………………………… 3 分

所以 $BC \perp$ 平面 AOD. ………………………………………………………………… 4 分

因为 $AD \subset$ 平面 AOD，故 $BC \perp AD$. ………………………………………………… 5 分

（2）在 ΔAOD 中，$AO = 1$，$OD = \sqrt{3}$，$AD = \sqrt{7}$，由余弦定理可得，

$\cos\angle AOD = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故 $\angle AOD = 150°$. …………… 6 分



如图，以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 及过 O 点垂直于平面 ABC 的方向为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $O-xyz$， …………… 7 分

可得 $D(-\dfrac{3}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$，所以 $\overrightarrow{BD} = (-\dfrac{3}{2}, -1, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{CB} = (0, 2, 0)$，$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$，

设$\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$为平面$ABD$的一个法向量，则

$\begin{cases}-x_1+y_1=0\\ -\frac{3}{2}x_1-y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0\end{cases}$，令$x=\sqrt{3}$，可得$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},\sqrt{3},5)$，…………………… 9 分

设$\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$为平面$BCD$的一个法向量，则

$\begin{cases}2y_2=0\\ -\frac{3}{2}x_2-y_2+\frac{\sqrt{3}}{2}z_2=0\end{cases}$，令$x_2=\sqrt{3}$，可得$\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},0,3)$，…………………11 分

所以$\cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>=\frac{3+0+15}{\sqrt{31}\times\sqrt{12}}=\frac{3\sqrt{93}}{31}$，

故平面ABD与平面BCD夹角的余弦值为$\frac{3\sqrt{93}}{31}$. ………………………………12 分

20. 解：(1) 设该容器的体积为V，则$V=\pi r^2 l+\frac{2}{3}\pi r^3$，

又$V=\frac{160}{3}\pi$，所以$l=\frac{160}{3r^2}-\frac{2}{3}r$，…………………………………………………… 2 分

因为$l\geq 6r$，所以$0<r\leq 2$.……………………………………………………………… 4 分

所以建造费用$y=2\pi rl\times\frac{9}{4}+3\pi r^2 m=2\pi r(\frac{160}{3r^2}-\frac{2}{3}r)\times\frac{9}{4}+3\pi r^2 m$，

因此$y=3\pi(m-1)r^2+\frac{240\pi}{r},0<r\leq 2$. ………………………………………………… 5 分

(2) 由 (1) 得$y'=6\pi(m-1)r-\frac{240\pi}{r^2}=\frac{6\pi(m-1)}{r^2}(r^3-\frac{40}{m-1}),0<r\leq 2$. ……… 6 分

由于$m>\frac{9}{4}$，所以$m-1>0$，令$r^3-\frac{40}{m-1}=0$，得$r=\sqrt[3]{\frac{40}{m-1}}$.……………………… 7 分

若 $\sqrt[3]{\frac{40}{m-1}}<2$，即 $m>6$，当 $r\in(0,\sqrt[3]{\frac{40}{m-1}})$ 时，$y'<0$，$y(r)$ 为减函数，当 $r\in(\sqrt[3]{\frac{40}{m-1}},2)$ 时，$y'>0$，$y(r)$ 为增函数，此时 $r=\sqrt[3]{\frac{40}{m-1}}$ 为函数 $y(r)$ 的极小值点，也是最小值点. ………………………………………………………… 9 分

若 $\sqrt[3]{\frac{40}{m-1}}\geq 2$，即 $\frac{9}{4}<m\leq 6$，当 $r\in(0,2]$ 时，$y'<0$，$y(r)$ 为减函数，此时 $r=2$ 是 $y(r)$ 的最小值点. ………………………………………………………… 11 分

综上所述，当 $\frac{9}{4}<m\leq 6$ 时，建造费用最小时 $r=2$；当 $m>6$ 时，建造费用最小时 $r=\sqrt[3]{\frac{40}{m-1}}$. ………………………………………………………… 12 分

21. 解：（1）设 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，$P(x_1,y_1)$，

则 $k_{AP}k_{BP}=\frac{y_1-0}{x_1+a}\times\frac{y_1-0}{x_1-a}=\frac{y_1^2}{x_1^2-a^2}=\frac{1}{4}$，……………………………… 1 分

又因为点 $P(x_1,y_1)$ 在双曲线上，所以 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$. ……………………………… 2 分

于是 $y_1^2=\frac{1}{4}x_1^2-\frac{a^2}{4}=\frac{b^2}{a^2}x_1^2-b^2$，对任意 $x_1\neq 0$ 恒成立，

所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，即 $a^2=4b^2$. ………………………………………………… 3 分

又因为 $c=\sqrt{5}$，$c^2=a^2+b^2$，可得 $a^2=4$，$b^2=1$，

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$. ……………………………………………… 5 分

（2）设直线 l 的方程为：$x=ty+\sqrt{5}$，$M(x_3,y_3),N(x_4,y_4)$，由题意可知 $t\neq\pm 2$，

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-y^2=1\\x=ty+\sqrt{5}\end{cases}$，消$x$可得，$(t^2-4)y^2+2\sqrt{5}ty+1=0$，

则有$y_3+y_4=\dfrac{-2\sqrt{5}t}{t^2-4}$，$y_3y_4=\dfrac{1}{t^2-4}$，…………………………………………6 分

假设存在定点$D(m,0)$，

则$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}=(x_3-m)(x_4-m)+y_3y_4$

$=(ty_3+\sqrt{5}-m)(ty_4+\sqrt{5}-m)+y_3y_4$ …………………………………………7 分

$=(t^2+1)y_3y_4+(\sqrt{5}-m)t(y_3+y_4)+(\sqrt{5}-m)^2$

$=\dfrac{t^2+1}{t^2-4}-\dfrac{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-m)t^2}{t^2-4}+(\sqrt{5}-m)^2$

$=\dfrac{(m^2-4)t^2-(4m^2-8\sqrt{5}m+19)}{t^2-4}$ …………………………………………8 分

令$4m^2-8\sqrt{5}m+19=4(m^2-4)$，解得$m=\dfrac{7\sqrt{5}}{8}$，…………………………………10 分

此时$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}=m^2-4=\dfrac{245}{64}-4=-\dfrac{11}{64}$，…………………………………11 分

所以存在定点$D(\dfrac{7\sqrt{5}}{8},0)$，使得$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$为定值$-\dfrac{11}{64}$.…………………………12 分

22. 解：（1）$f(x)=xe^x-ax^2-2ax$，则$f'(x)=(x+1)(e^x-2a)$，…………………1 分

当$a>0$时，方程$e^x-2a=0$的根为$x=\ln(2a)$.

当$\ln(2a)>-1$，即$a>\dfrac{1}{2e}$时，当$x\in(-\infty,-1)$和$x\in(\ln(2a),+\infty)$时，$f'(x)>0$，

$f(x)$单调递增，当$x\in(-1,\ln(2a))$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.…………2 分

当$\ln(2a)<-1$，即$0<a<\dfrac{1}{2e}$，当$x\in(-\infty,\ln(2a))$和$x\in(-1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，

$f(x)$单调递增，当$x\in(\ln(2a),-1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.…………4 分

当$\ln(2a)=-1$，即$a=\dfrac{1}{2e}$时，$y'\geqslant 0$恒成立，函数在$\mathbf{R}$上单调递增，…………5 分

综上所述，当$0<a<\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$时，$f(x)$在$(-\infty,\ln(2a))$，$(-1,+\infty)$上单调递增，在$(\ln(2a),-1)$上单调递减；当$a=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$时，$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，当$a>\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$时，$f(x)$在$(-\infty,-1)$，$(\ln(2a),+\infty)$上单调递增，在$(-1,\ln(2a))$上单调递减. ……… 6 分

（2）存在实数a使得$f'(x)\geqslant b-2a$对任意x恒成立，即$b\leqslant x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-2ax$恒成立.

令$g(x)=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-2ax$，则$b\le g(x)_{\min}$. …………………………………………… 7 分

因为$g'(x)=(x+2)\mathrm{e}^x-2a$，当$x\leqslant-2$时，$g'(x)<0$恒成立；当$x>-2$时，$g''(x)=(x+3)\mathrm{e}^x>0$，函数$g'(x)$在$(-2,+\infty)$上单调递增，

且$g'(-2)=-2a<0$，$g'(2a)=(2a+2)\mathrm{e}^{2a}-2a>0$，

所以，存在$x_0\in(-2,2a)$，使得$g'(x_0)=0$，且$g(x)$在$(-2,x_0)$上单调递减，

在$(x_0,+\infty)$上单调递增，所以$g(x)_{\min}=g(x_0)=(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0}-2ax_0$. …………… 9 分

于是，原命题可转化为存在a使得$b\leqslant(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0}-2ax_0$在$(-2,+\infty)$上成立，

又因为$g'(x_0)=(x_0+2)\mathrm{e}^{x_0}-2a=0$，所以$2a=(x_0+2)\mathrm{e}^{x_0}$.

所以存在$x_0\in(-2,+\infty)$，使得$b\leqslant(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0}-(x_0^2+2x_0)\mathrm{e}^{x_0}=\mathrm{e}^{x_0}(-x_0^2-x_0+1)$成立.

……………………………………………………10 分

令$h(x)=\mathrm{e}^x(-x^2-x+1)$，$x\in(-2,+\infty)$，则$h'(x)=\mathrm{e}^x(-x^2-3x)$，所以当$x\in(-2,0)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，当$x\in(0,+\infty)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，所以$h(x)_{\max}=h(0)=1$，所以$b\leqslant1$. ……………………………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。