

高二数学参考答案及评分标准

一、单项选择题(每小题 5 分,共 40 分)

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 答案 | A | B | D | B | C | B | C | D |

二、多项选择题(每小题 5 分,共 20 分)

9. BC            10. BD            11. AC            12. BCD

三、填空题(每小题 5 分,共 20 分)

13. 1280            14.  $-0.2$             15.  $C_{m+n}^k$             16.  $\{x|x<2\}$

四、解答题(共 70 分)

17. (本小题满分 10 分)

解:设 $A_i$  = “抽到第  $i$  袋”,  $i=1,2,3$

$B$  = “随机抽取 2 份,恰好抽到男生和女生的报名表各 1 份”.

则  $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}$ , ..... 2 分

$P(B|A_1)=\frac{C_6^1C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{24}{45}, P(B|A_2)=\frac{C_7^1C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{21}{45}, P(B|A_3)=\frac{C_5^1C_5^1}{C_{10}^2}=\frac{25}{45}$ . ..... 8 分

由全概率公式得

$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$   
 $=\frac{1}{3}\times\frac{24+21+25}{45}=\frac{14}{27}$ . ..... 10 分

18. (本小题满分 12 分)

解:(1)

| 性别 | 保护动物意识 |    | 合计  |
|----|--------|----|-----|
|    | 强      | 弱  |     |
| 男  | 35     | 15 | 50  |
| 女  | 20     | 30 | 50  |
| 合计 | 55     | 45 | 100 |

..... 6 分

(2)零假设为  $H_0$ :该校学生保护动物意识的强弱与性别无关,  
根据列联表中的数据,经计算得到

$\chi^2=\frac{100\times(35\times30-15\times20)^2}{50\times50\times55\times45}=\frac{100}{11}\approx9.091>7.879=x_{0.005}$ . ..... 10 分

根据小概率值  $\alpha=0.005$  的独立性检验,我们推断  $H_0$  不成立,

即认为保护动物意识的强弱与性别有关,此推断犯错误的概率不大于 0.005. ... 12 分

19. (本小题满分 12 分)

解:(1)由题意知  $C_n^4=C_n^2$ ,所以  $n=6$  ..... 2 分

令  $x=1$ ,得展开式中各项系数的和为  $f(1)=(2\times1-1)^6=1$ . ..... 4 分

(2)由(1)知  $f(x)=(2x-\frac{1}{x})^6$ ,其展开式的通项公式为

$T_{r+1}=C_6^r\cdot(2x)^{6-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{-r}=(-1)^r\cdot C_6^r\cdot 2^{6-r}\cdot x^{6-2r}, r=0,1,2,\cdots,6$ .  
..... 6 分

由  $6-2r=0$ ,得  $r=3$ ,所以展开式的常数项为  $T_4=-C_6^3\cdot 2^3=-160$ .

由  $6-2r=4$ ,得  $r=1$ ,所以展开式中含  $x^4$  项为  $T_2=-C_6^1\cdot 2^5\cdot x^4=-192x^4$ ,.....  
..... 10 分

所以  $(1+\frac{1}{x^4})f(x)$  的展开式中的常数项为  $-160-192=-352$ . ..... 12 分

20. (本小题满分 12 分)

解:(1)因为  $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ ,

所以  $f'(x)=x^2-4$ . ..... 1 分

则  $f'(3)=5$ ,即切线的斜率  $k=5$ . ..... 2 分

所以曲线  $y=f(x)$  在点  $(3,1)$  处的切线方程为:  $y-1=5(x-3)$ ,

即  $5x-y-14=0$ . ..... 4 分

(2)由(1)知  $f'(x)=x^2-4=(x+2)(x-2)$ ,

令  $f'(x)=0$ ,解得  $x=-2$ ,或  $x=2$ . ..... 5 分

当  $x$  变化时,  $f'(x), f(x)$  的变化情况如下表所示

| $x$     | $(-\infty,-2)$ | $-2$           | $(-2,2)$ | $2$            | $(2,+\infty)$ |
|---------|----------------|----------------|----------|----------------|---------------|
| $f'(x)$ | +              | 0              | -        | 0              | +             |
| $f(x)$  | 单调递增           | $\frac{28}{3}$ | 单调递减     | $-\frac{4}{3}$ | 单调递增          |

..... 6 分

令  $f(x)=\frac{28}{3}$ ,即  $\frac{1}{3}x^3-4x+4=\frac{28}{3}$

化简得:  $x^3-12x-16=0$ ,即  $(x+2)^2(x-4)=0$

解得  $x=-2$ ,或  $x=4$ . ..... 8 分

令  $f(x)=-\frac{4}{3}$ ,即  $\frac{1}{3}x^3-4x+4=-\frac{4}{3}$

化简得:  $x^3-12x+16=0$ ,即  $(x-2)^2(x+4)=0$

解得  $x=2$ ,或  $x=-4$ . ..... 10 分

因为函数  $f(x)$  在区间  $(a,a+5)$  既有最大值又有最小值,结合  $f(x)$  单调性

可得  $\begin{cases} -4\leq a<-2 \\ 2<a+5\leq 4 \end{cases}$ ,解得:  $-3<a<-2$ ,

所以  $a$  的取值范围为  $(-3,-2)$ . ..... 12 分

21. (本小题满分 12 分)

解:(1)记  $A_i$  = “第  $i$  个题目回答正确”,  $\overline{A_i}$  = “第  $i$  个题目回答不正确”,  $i=1,2,3,4$ .

由题意知  $X$  可能取值为 2,3,4. .... 1 分

$X$  的分布列为

$P(X=2)=P(\overline{A_1} \overline{A_2})=(1-p)^2;$  .... 2 分

$P(X=3)=P(A_1A_2A_3)+P(A_1\overline{A_2} \overline{A_3})+P(\overline{A_1} A_2\overline{A_3})$   
 $=p^3+2p(1-p)^2=3p^3-4p^2+2p;$  .... 4 分

$P(X=4)=P(A_1A_2A_3)+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3)$   
 $=3p^2(1-p)=-3p^3+3p^2.$  .... 6 分

(2)方法一 记  $Z$  = “连续 9 天参加‘挑战答题’活动中得 10 分的次数”,

每天得 10 分的概率记为  $p'$ , 则  $Z \sim B(9, p')$  .... 7 分

由题意知  $p'=P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_2\overline{A_3}A_4)+P(A_1\overline{A_2}A_3A_4)+P(\overline{A_1}A_2A_3A_4)$   
 $=p^3+3p^3(1-p)=(\frac{2}{3})^3+3(\frac{2}{3})^3(1-\frac{2}{3})=\frac{16}{27}$  .... 8 分

所以  $E(Z)=np'=9 \times \frac{16}{27}=\frac{16}{3},$  .... 10 分

又因为  $Y=10Z+8(9-Z)=72+2Z$  .... 11 分

所以  $E(Y)=72+2E(Z)=72+2 \times \frac{16}{3}=\frac{248}{3}.$  .... 12 分

方法二 记  $Z$  = “1 天中参加‘挑战答题’活动获得的积分”,

由题意知  $Z$  可能取值为 10,8. .... 7 分

$P(Z=10)=P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_2\overline{A_3}A_4)+P(A_1\overline{A_2}A_3A_4)+P(\overline{A_1}A_2A_3A_4)$   
 $=p^3+3p^3(1-p)=(\frac{2}{3})^3+3(\frac{2}{3})^3(1-\frac{2}{3})=\frac{16}{27}$  .... 8 分

$P(Z=8)=1-P(Z=10)=\frac{11}{27}$  .... 9 分

所以  $E(Z)=10P(Z=10)+8P(Z=8)=\frac{248}{27},$  .... 10 分

所以  $E(Y)=9E(Z)=\frac{248}{3}.$  .... 12 分

22. (本小题满分 12 分)

解:(1)由函数  $f(x)=\ln x+ax-\frac{1}{x},$

可得  $f'(x)=\frac{1}{x}+a+\frac{1}{x^2}=\frac{ax^2+x+1}{x^2}(x>0).$  .... 1 分

①若  $a \geq 0$ , 则  $f'(x) > 0$ , 故  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增. .... 2 分

②若  $a < 0$ , 当  $0 < x < \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}$  时,  $f'(x) > 0$ ,

当  $x > \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}$  时,  $f'(x) < 0$ .

故  $f(x)$  在  $(0, \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a})$  上单调递增, 在  $(\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}, +\infty)$  上单调递减.

..... 4 分

(2)证明:由(1)知  $a > 1$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

且  $f(1)=a-1 > 0, f(\frac{1}{\sqrt{a}})=-\frac{1}{2}\ln a < 0$

所以存在唯一的  $x_0 \in (\frac{1}{\sqrt{a}}, 1)$ , 使  $f(x_0)=0.$  .... 6 分

由  $g(x)=x \ln x+(a-1)x+\frac{1}{x}(x>0)$  可得

$g'(x)=\ln x-\frac{1}{x^2}+a.$

设  $h(x)=\ln x-\frac{1}{x^2}+a,$

则  $h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}>0.$

所以  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

即  $g'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增. .... 7 分

又  $g'(1)=a-1 > 0, g'(\frac{1}{\sqrt{a}})=-\frac{1}{2}\ln a < 0$

所以存在  $m \in (\frac{1}{\sqrt{a}}, 1)$ , 使  $g'(m)=0$

$g(x)$  在  $(0, m)$  单调递减, 在  $(m, +\infty)$  上单调递增,

所以  $m$  为  $g(x)$  的极小值点, 故  $x_1=m.$  .... 8 分

由  $g'(m)=0$  可得  $\ln x_1-\frac{1}{x_1^2}+a=0$

故  $a=\frac{1}{x_1^2}-\ln x_1,$

所以  $f(x_1)=\ln x_1+ax_1-\frac{1}{x_1}$

$=\ln x_1+x_1(\frac{1}{x_1^2}-\ln x_1)-\frac{1}{x_1}=(1-x_1)\ln x_1.$  .... 10 分

又  $x_1 \in (\frac{1}{\sqrt{a}}, 1)$ , 所以  $f(x_1)=(1-x_1)\ln x_1 < 0.$

又因为  $f(x_0)=0$  且  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

所以  $x_0 > x_1.$  .... 12 分