# 2023年普通高等学校招生全国统一考试模拟试题

## 数学（二）

本试卷共4页，22小题，满分150分.考试用时120分钟.

**注意事项：**1.答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在答题纸上.将条形码横贴在答题纸“贴条形码区”.

2.作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题纸上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上.

3.非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题纸各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答的答案无效.

4.考生必须保持答题纸的整洁.考试结束后，将试卷和答题纸一并交回.

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1.已知 $z\left(1+\mathrm{i}\right)=7+5\mathrm{i}$，则 $\overline{z}=$

A.$6-\mathrm{i}$　　B.$6+\mathrm{i}$　　C.$3-2\mathrm{i}$　　D.$12-\mathrm{i}$

2.已知集合 $U=\left\{x\middle|x^2-7x-8\leqslant 0\right\}$，$A=\left\{0,1,2\right\}$，$B=\left\{-2,-1,0,1,2,3,4\right\}$，则 $\left(\complement_U A\right)\cap B=$

A.$\left\{0,1,2\right\}$　　B.$\left\{3,4\right\}$　　C.$\left\{-1,3,4\right\}$　　D.$\left\{-2,-1,3,4\right\}$

3.下列函数不是偶函数的是

A.$f\left(x\right)=\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)$　　B.$f\left(x\right)=2^x+2^{-x}$

C.$f\left(x\right)=\dfrac{x}{2^x-1}+x$　　D.$f\left(x\right)=x\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

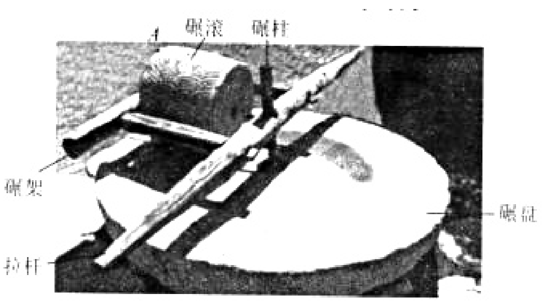
4.使 $p:\forall x>0$，$x+\dfrac{4}{x}\geqslant a$ 的否定为假命题的一个充分不必要条件是

A.$a\geqslant 4$　　B.$a\leqslant 4$　　C.$a\geqslant 2$　　D.$a\leqslant 2$

5.某市要建立步行15分钟的核酸采样点，现有9名采样工作人员全部分配到3个采样点，每个采样点至少分配2人，则不同的分配方法种数为

A.1918　　B.11508　　C.12708　　D.18

6.石碾子是我国电气化以前的重要粮食加工工具.它是依靠人力或畜力把谷子、稻子等谷物脱壳或把米碾碎成碴子或面粉的石制工具.如图，石碾子主要由碾盘、碾滚和碾架等组成，一个直径为60cm的圆柱形碾滚的最外侧与碾柱的距离为100cm，碾滚最外侧正上方为点 $A$，若人推动拉杆绕碾盘转动一周，则点 $A$ 距碾盘的垂直距离约为




A.15cm　　B.$15\sqrt{3}$ cm　　C.$\left(30-15\sqrt{3}\right)$cm　　D.45cm

7.过圆锥内接正方体（正方体的 4 个顶点在圆锥的底面，其余顶点在圆锥的侧面）的上底面作一平面，把圆锥截成两部分，下部分为圆台，已知此圆台上底面与下底面的面积比为 1:4，母线长为$\sqrt{6}$，设圆台体积为$V_1$，正方体的外接球体积为$V_2$，则$\dfrac{V_1}{V_2}=$

A.$\dfrac{7\sqrt{3}}{9}$　　B.$\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$　　C.$\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$　　D.$\dfrac{\sqrt{21}}{9}$

8.若$a=200$，$b=\lg(101)^{99}$，$c=101\lg 99$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为

A.$a>c>b$　　B.$c>a>b$　　C.$c>b>a$　　D.$a>b>c$

**二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.**

9.设$\alpha$为第一象限角，$\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{1}{3}$，则

A.$\sin\left(\dfrac{5\pi}{8}-\alpha\right)=-\dfrac{1}{3}$　　B.$\cos\left(\alpha+\dfrac{7\pi}{8}\right)=-\dfrac{1}{3}$

C.$\sin\left(\dfrac{13\pi}{8}-\alpha\right)=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　D.$\tan\left(\dfrac{\pi}{8}-\alpha\right)=-2\sqrt{2}$

10.已知函数$f(x)=x^3+bx^2+cx+b^2\ (b<0)$在$x=-1$处有极值，且极值为 8，则

A.$f(x)$有三个零点

B.$b=c$

C.曲线$y=f(x)$在点$\left(2,f(2)\right)$处的切线方程为$3x+y+4=0$

D.函数$y=f(x)-2$为奇函数

11.已知抛物线$C:x^2=4y$的焦点为$F$，直线$l_1$，$l_2$过点$F$与圆$E:(x-2)^2+y^2=1$分别切于$A$，$B$两点，

交$C$于点$M$，$N$和$P$，$Q$，则

A. $C$与$E$没有公共点

B.经过$F$，$A$，$B$三点的圆的方程为$x^2+y^2-2x-y=0$

C. $|AB|=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

D. $|MN|+|PQ|=\dfrac{136}{9}$

12.设正整数$n=a_0\cdot 9^0+a_1\cdot 9^1+\cdots+a_{k-1}\cdot 9^{k-1}+a_k\cdot 9^k$，其中$a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}(i=0,1,2,\cdots,k)$.记$\omega(n)=a_0+a_1+\cdots+a_k$，当$n\leqslant 8$时，$S(n)=\omega(1)+\omega(2)+\cdots+\omega(9n)$，则

A. $S(n)-S(n-1)=9n+28(n\geqslant 2)$

B. $\omega(9n+10)=\omega(n)+1$

C.数列$\left\{\dfrac{S(n)}{n}\right\}$为等差数列

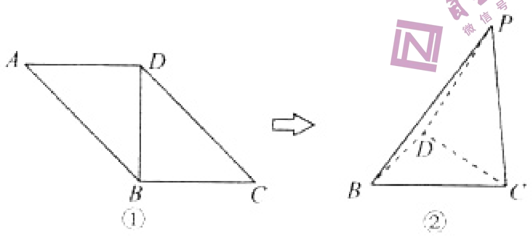
D. $\omega\left(\dfrac{9^n-1}{8}\right)=n$

**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.**

13.已知向量$\vec{a}=(\sqrt{3},-1)$，$\vec{b}=(m,1)$，若$|\vec{b}|>|\vec{a}|$，$|2\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{3}$，则$m=$__________.

14.已知随机变量$X\sim N\left(\dfrac{1}{2},\sigma^2\right)$，且$P\left(X<-\dfrac{1}{2}\right)=0.25$，$P(X>2)=0.1$，则$P\left(-1\leqslant X\leqslant -\dfrac{1}{2}\right)=$_____.

15.如图①，在平行四边形$ABCD$中，$AB=\sqrt{2}BD=\sqrt{2}AD=2\sqrt{2}$，将$\triangle ABD$沿$BD$折起，使得点$A$到达点$P$处（如图②），$PC=2\sqrt{2}$，则三棱锥$P-BCD$的内切球半径为___________.




16.已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F$，上顶点为$B$，线段$BF$的垂直平分线交$C$于$M$，$N$两点，交$y$轴于点$P$，$O$为坐标原点，$\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PO}$，则$C$的离心率为__________；若$\triangle BMN$的周长为8，则$b=$______________.

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10分）记$\triangle ABC$的内角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，已知$2\sin A=3\tan\dfrac{B+C}{2}$.

（1）求 $A$；

（2）若$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{6}$，求$a$.

18.（12 分）某校有$A$，$B$两个餐厅，为调查学生对餐厅的满意程度，在某次用餐时学校从$A$餐厅随机抽取了67 人，从$B$餐厅随机抽取了 69 人，其中在$A$，$B$餐厅对服务不满意的分别有 15 人、6 人，其他人均满意.

（1）根据数据列出 2×2 列联表，并依据小概率值$\alpha=0.005$的独立性检验，能否认为用餐学生与两家餐厅满意度有关联？

（2）学校对大量用餐学生进行了统计，得出如下结论：任意一名学生第一次在校用餐时等可能地选择一家餐厅用餐，从第二次用餐起，如果前一次去了$A$餐厅，那么本次到$A$，$B$餐厅的概率分别为$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$；如果前一次去了$B$餐厅，那么本次到$A$，$B$餐厅的概率均为$\frac{1}{2}$.求任意一名学生第 3 次用餐到$B$餐厅的概率.

附：$\chi^2=\dfrac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$，其中$n=a+b+c+d$.

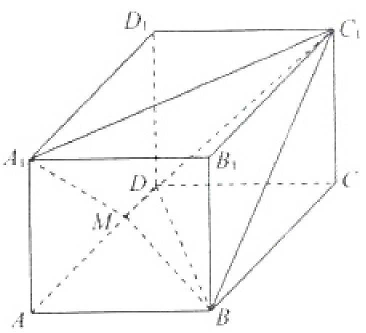
| $\alpha$ | 0.100 | 0.050 | 0.025 | 0.010 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 |

19.（12 分）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=9$，$3a_{n+1}=a_n+12$.

（1）证明：数列$\{a_n-6\}$为等比数列；

（2）求数列$\{na_n\}$的前$n$项和$S_n$.

20.（12 分）如图，在直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$为矩形，点$M$在棱$AD$上，$AM=3MD$，$AB=BB_1=2$，$BD\perp C_1M$.




（1）求$AD$；

（2）求二面角$A_1-MC_1-B$的正弦值.

21.（12 分）已知一动圆与圆$E:\left(x+3\right)^2+y^2=18$外切，与圆$F:\left(x-3\right)^2+y^2=2$内切，该动圆的圆心的轨迹为曲线$C$.

（1）求$C$的标准方程；

（2）直线$l$与$C$交于$A$，$B$两点，点$P$在线段$AB$上，点$Q$在线段$AB$的延长线上，从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立：

①$P(8,1)$；②$|AP|\cdot|BQ|=|BP|\cdot|AQ|$；③$Q$是直线$l$与直线$x-y-1=0$的交点.

注：如果选择不同的组合分别解答，按第一个解答计分.

22.（12分）已知函数$f(x)=xe^{x}$，$g(x)=x+x\ln x$.

（1）证明：$f(x)>g(x)$；

（2）若$|f(x)-a|>ag(x)$恒成立，求实数$a$的取值范围.

# 数学（二）

## 一、选择题

1.B 【解析】$z=\dfrac{7+5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(7+5\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{12-2\mathrm{i}}{2}=6-\mathrm{i}$，故$\bar{z}=6+\mathrm{i}$.故选B项

2.C 【解析】由题意得$U=\{x|-1\leqslant x\leqslant 8\}$，所以$(\complement_U A)\cap B=\{-1,3,4\}$.故选C项.

3.C 【解析】对于A项，$f(x)=-\cos x$，所以$f(-x)=-\cos(-x)=-\cos x=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数；对于B项，$f(-x)=2^{-x}+2^{x}=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数；对于C项，$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f(-x)=\dfrac{-x}{2^{-x}-1}-x=-x\left(\dfrac{2^{x}}{1-2^{x}}+1\right)=\dfrac{x}{2^{x}-1}\neq f(x)$，所以$f(x)=\dfrac{x}{2^{x}-1}+x$不是偶函数；对于D项，$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(-x)=-x\ln\left(\sqrt{x^{2}+1}+x\right)=x\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^{2}+1}+x}\right)=x\ln\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)=f(x)$，所以$f(x)=x\ln\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)$是偶函数.故选C项.

4.D 【解析】由题得：$p:\forall x>0$，$x+\dfrac{4}{x}\geqslant a$为真命题，又$x+\dfrac{4}{x}\geqslant 4$，当且仅当$x=2$时等号成立，反之也成立.所以$a\leqslant 4$是$p$为真命题的充要条件，$a\geqslant 4$是$p$为真命题的既不充分也不必要条件，$a\geqslant 2$是$p$为真命题的既不充分也不必要条件，$a\leqslant 2$是$p$为真命题的充分不必要条件.故选D项.

5.B 【解析】分组方法共有$(2,2,5)$，$(2,3,4)$，$(3,3,3)$三种情况，所以分配方法共有