2020年哈尔滨市第三中学校第二次高考模拟考试

数学试卷（文史类）答案及评分标准

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	A	C	B	D	C	C	A	D	C	B

二、填空题：

13. 1　　14. $\frac{1}{2}$　　15. $\frac{2}{3}$　　16. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$；$\frac{60}{11}$

三、解答题：

17.（1）依题意 $a+b=0.046,1000(b-a)=6$，

解得 $a=0.020, b=0.026$ ……3 分

中位数为 $112\frac{4}{13}$ ……6 分

（2）设“抽取的 2 名同学的分数不在同一组内”为事件 A

由题意知，在分数为 $[130,140)$ 的同学中抽取 4 人，分别用 a_1,a_2,a_3,a_4 表示，

在分数为 $[140,150]$ 的同学中抽取 2 人，分别用 b_1,b_2 表示， …… 7 分

从这 6 名同学中抽取 2 人所有可能出现的结果有：

(a_1,a_2)，(a_1,a_3)，(a_1,a_4)，(a_1,b_1)，(a_1,b_2)，(a_2,a_3)，(a_2,a_4)，(a_2,b_1)，(a_2,b_2)，

(a_3,a_4)，(a_3,b_1)，(a_3,b_2)，(a_4,b_1)，(a_4,b_2)，(b_1,b_2)

共 15 种 …… 9 分

抽取的 2 名同学的分数不在同一组内的结果有：

(a_1,b_1)，(a_1,b_2)，(a_2,b_1)，(a_2,b_2)，(a_3,b_1)，(a_3,b_2)，(a_4,b_1)，(a_4,b_2)

共 8 种 ……10 分

所以$P(A)=\frac{8}{15}$，抽取的2名同学的分数不在同一组内的概率为$\frac{8}{15}$…… 12分

18. 解：（1）$\because S_5=5=5a_3, a_1+2d=1$，

又$\because a_1=-3$，解得$d=2$，……2分

所以$a_n=a_1+(n-1)d=-3+(n-1)2=2n-5$，……3分

$\because b_n$的前n项和$G_n=2^{n+1}-2$

$\therefore n=1$时，$b_1=2^2-2=2$ ……4分

$n\geq 2$时，$b_n=G_n-G_{n-1}=2^{n+1}-2-2^n+2=2^n$

$\therefore b_n=2^n(n\in N^*)$；……6分

（2）$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$

$T_n=(-3)\cdot 2^1+(-1)\cdot 2^2+1\cdot 2^3+\cdots+(2n-5)2^n$ ①

$2T_n=(-3)\cdot 2^2+(-1)\cdot 2^3+1\cdot 2^4+\cdots+(2n-5)2^{n+1}$ ②

①减去②可得

$-T_n=-6+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}-(2n-5)2^{n+1}$

$-T_n=-6+2^3\frac{1-2^{n-1}}{1-2}-(2n-5)2^{n+1}=-6-8+2^{n+2}-(2n-5)2^{n+1}$

$-T_n=-14-(2n-7)2^{n+1}$

$T_n=14+(2n-7)2^{n+1}$ ……12分

19. 证明：（1）因为$AB=AA_1=A_1B$，F为AB中点，所以$A_1F\perp AB$.

因为平面$AA_1B_1B\perp$平面ABC，平面$AA_1B_1B\cap$平面$ABC=AB$，$A_1F\subset$平面AA_1B_1B，

所以$A_1F\perp$平面ABC，而$BC\subset$平面ABC，故$A_1F\perp BC$，……3分

又因为$BC^2+AC^2=AB^2$，所以$BC\perp AC$，又$\because$在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，

$AC\parallel A_1C_1\ \therefore BC\perp A_1C_1, BC\perp A_1E$

又$A_1C_1\cap A_1E=A_1$，故$BC\perp$面A_1EF，

又$EF\subset$面A_1EF，所以$BC\perp EF$ ……5 分

(2) $V_{C-BEF}=V_{E-BCF}$，

在三棱柱中，$V_{E-BCF}=\frac{1}{3}S_{\Delta BCF}\cdot A_1F=2$ ……7 分

取BC中点M，连EM，FM，$EM\parallel A_1F$，

由（1）知 $A_1F\perp$平面ABC，所以$EM\perp$平面ABC，

$EM=2\sqrt{3}, FM=\sqrt{3}, BM=1$，

所以$EF=\sqrt{15}, BE=\sqrt{13}, BF=2, S_{\Delta BEF}=\frac{\sqrt{51}}{2}$， ……10 分

设点C到平面BEF的距离为h，则 $V_{C-BEF}=2=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{51}}{2}\cdot h$

$\therefore h=\frac{4}{17}\sqrt{51}$

点C到平面BEF的距离为$\frac{4}{17}\sqrt{51}$ ……12 分

20.（1）直线A_1B_1的方程为$-\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，

由题意可得$\begin{cases}2ab=4\sqrt{3}\\ \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\frac{2}{7}\sqrt{21}\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$，

$\therefore$椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$……4 分

（2）当直线 AB 的斜率不存在时，直线 AB 的方程为 $x=\pm1$，此时 $S_{\square OAPB}=3$ ....5 分

当直线 AB 的斜率存在时，设 $AB: y=kx+m$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=kx+m\end{cases}$，可得 $(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

则 $\Delta=48(4k^2-m^2+3)>0$，

$x_1+x_2=-\dfrac{8km}{4k^2+3}, x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{4k^2+3}$，

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\dfrac{6m}{4k^2+3}$，.....7 分

$\because$ 四边形 $OAPB$ 为平行四边形，$\therefore \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}$，$\therefore P(-\dfrac{8km}{4k^2+3},\dfrac{6m}{4k^2+3})$，

$\because$ 点 P 在椭圆上，$\therefore \dfrac{(-\dfrac{8km}{4k^2+3})^2}{4}+\dfrac{(\dfrac{6m}{4k^2+3})^2}{3}=1$，整理得 $m^2=k^2+\dfrac{3}{4}$，.....8 分

$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{4k^2-m^2+3}}{4k^2+3}$，.....9 分

原点 O 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$，

$S_{\square OAPB}=|AB|\cdot d=\dfrac{4\sqrt{3}|m|\sqrt{4k^2-m^2+3}}{4k^2+3}=3$，.....11 分

综上，四边形 $OAPB$ 的面积为定值 3.....12 分

21. 解：（1）$f'(x)=m(1+\ln x)-\dfrac{m+1}{x}$ .....1 分

$[f'(x)]'=\dfrac{m}{x}+\dfrac{m+1}{x^2}=\dfrac{mx+(m+1)}{x^2}$ .....2 分

$\because m>0 \therefore mx+m+1>0$，

$\therefore [f'(x)]'>0, \therefore f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调递增 .....4 分

（2）设$F(x)=f(x)-g(x)=mx\ln x-(m+1)\ln x+x-\frac{3}{e}$

$F'(x)=m\ln x+m-\frac{m+1}{x}+1=\varphi(x)$，由于$m>0$，$x>0$

$\varphi'(x)=\frac{m}{x}+\frac{m+1}{x^2}>0$恒成立……6 分

知函数$F'(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数且$F'(1)=0$……7 分

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$	递减	极小值	递增

$F(1)=1-\frac{3}{e}=\frac{e-3}{e}<0$

$F\left(\frac{1}{e}\right)=m\frac{e-1}{e}+\frac{e-2}{e}>0$，$F(e)=m(e-1)+\frac{e(e-1)-3}{e}>0$……10 分

知$F(x)$在区间$\left(\frac{1}{e},1\right)$以及$(1,e)$内各有一个零点，即为$x_1\in\left(\frac{1}{e},1\right)$，$x_2\in(1,e)$，

知$x_2-x_1<e-\frac{1}{e}$，即$x_2+\frac{1}{e}<x_1+e$……12 分

22.（1）消去参数可得 C 的直角坐标方程为$x^2+(y-4)^2=4$，

将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入得 C 的极坐标方程为$\rho^2-8\rho\sin\theta+12=0$，……2 分

又l的极坐标方程为$\theta=\beta(\rho\in R)$，将$\theta=\beta$代入C_1得$\rho^2-8\rho\sin\beta+12=0$，

则$\Delta=(8\sin\beta)^2-48=0$，$\sin\beta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以$\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\beta=\frac{\pi}{3}$，

此时 $\rho=2\sqrt{3}$，所以点 P 的极坐标为 $\left(2\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right)$ ……4 分

（2）由 C_1 的直角坐标方程为 $\left(x-2\sqrt{3}\right)^2+y^2=10$，所以圆心 $C_1(2\sqrt{3},0)$，

设 $A\left(\rho_1,\frac{\pi}{6}\right),B\left(\rho_2,\frac{\pi}{6}\right)$，将 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 代入 C_1 的极坐标方程 $\rho^2-4\sqrt{3}\rho\cos\theta+2=0$，

得 $\rho^2-6\rho+2=0$，$\Delta=28>0$，

所以 $\rho_1+\rho_2=6$，$\rho_1\rho_2=2$，所以 $\rho_1>0$，$\rho_2>0$，……6 分

又因为 $S=\frac{1}{2}\rho_1\rho_P\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}\rho_1$，$S'=\frac{1}{2}|OC_1|\rho_2\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\rho_2$，

所以 $\frac{S}{S'}+\frac{S'}{S}=\frac{\rho_1}{\rho_2}+\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{(\rho_1+\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2}{\rho_1\rho_2}=\frac{6^2-2\times2}{2}=16$ ……10 分

23.（1）$|x-2|-|2x-3|\geq-\frac{1}{2}$，

当 $x\geq2$ 时，$(x-2)-(2x-3)\geq-\frac{1}{2}$，此时解集为 $\varnothing$；

当 $\frac{3}{2}\leq x<2$ 时，$(2-x)-(2x-3)\geq-\frac{1}{2}$，解得 $\frac{3}{2}\leq x\leq\frac{11}{6}$；

当 $x<\frac{3}{2}$ 时，$(2-x)+(2x-3)\geq-\frac{1}{2}$，解得 $\frac{1}{2}\leq x<\frac{3}{2}$.

综上，不等式的解集为 $\{x|\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{11}{6}\}$ ……5 分

（2）$f(x)=\begin{cases}1-x,x\geq2\\5-3x,\frac{3}{2}\leq x<2\\x-1,x<\frac{3}{2}\end{cases}$，$f(x)$ 的最大值为 $m=\frac{1}{2}$，……6 分

$\therefore\frac{1}{a}+b=1$，即 $ab+1=a$，

$2\sqrt{\frac{b}{a}} \le \frac{1}{a}+b=1$，$\frac{b}{a} \le \frac{1}{4}$，$\frac{a}{b} \ge 4$ ……7 分

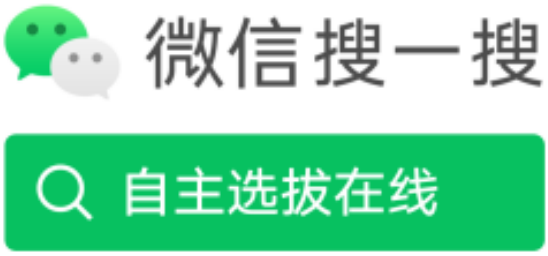
$\therefore (a^2-1)(\frac{1}{b^2}-1)=\frac{a^2}{b^2}-a^2-\frac{1}{b^2}+1=\frac{a^2}{b^2}-\frac{a^2b^2+1}{b^2}+1=\frac{a^2}{b^2}-\frac{(ab+1)^2-2ab}{b^2}+1$

$=\frac{a^2}{b^2}-\frac{a^2-2ab}{b^2}+1=\frac{2a}{b}+1 \ge 9$ ……10 分

关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



自主招生在线 微信号：zizzsw