

## 数 学

### 注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在试卷和答题卡指定位上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案用0.5mm黑色笔迹签字笔写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $U = \{x | x \in \mathbb{N}, \text{且 } x \leq 5\}$ ,  $A = \{2, 4\}$ ,  $B = \{2, 3\}$ , 则  $\complement_U(A \cup B) =$   
 A.  $\{1, 5\}$       B.  $\{2\}$       C.  $\{0, 1, 5\}$       D.  $\{3, 4\}$
2. 已知向量  $a, b$  满足  $|a| = 3, |b| = 2\sqrt{3}$ , 且  $a \perp (a - b)$ , 则  $a$  在  $b$  方向上的投影向量为  
 A.  $a$       B.  $\frac{3}{4}b$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{4}b$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}a$
3. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$  经过点  $(2, 3)$ , 则其渐近线方程是  
 A.  $y = \pm\sqrt{3}x$       B.  $y = \pm\frac{3}{2}x$       C.  $y = \pm\frac{2}{3}x$       D.  $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$
4. 粮食是关系国计民生和国家经济安全的重要战略物资,也是人民群众最基本的生活资料,粮食安全是“国之大者”。某农场的粮仓中间部分可近似看作是圆柱,圆柱的底面半径为4 m,上下两部分可以近似看作是完全相同的圆锥,圆柱的高是圆锥高的8倍,且这两个圆锥的顶点相距10 m,制作该粮仓至少需要材料(材料厚度忽略不计)  
 A.  $(64\pi + 8\sqrt{17}\pi) \text{ m}^2$       B.  $(64\pi + 4\sqrt{17}\pi) \text{ m}^2$   
 C.  $(128\pi + 8\sqrt{17}\pi) \text{ m}^2$       D.  $(128\pi + 4\sqrt{17}\pi) \text{ m}^2$
5. 已知  $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{5}, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , 则  $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} =$   
 A.  $-\frac{12}{5}$       B.  $\frac{12}{5}$       C.  $-\frac{12}{35}$       D.  $\frac{12}{35}$
6. 已知正项等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_3 - a_1 = 2$ , 则  $a_4 + a_5$  的最小值是  
 A. 4      B. 9      C. 6      D. 8



(第4题图)



7. 将一个四棱锥  $P-ABCD$  的每个顶点涂上一种颜色,并使同一条棱上的两个端点异色,若只有 5 种颜色可供使用,则共使用 4 种颜色的概率为

- A.  $\frac{2}{7}$                       B.  $\frac{3}{7}$                       C.  $\frac{4}{7}$                       D.  $\frac{2}{5}$

8. 已知函数  $f(x) = \sqrt{|x-1|} + \sqrt{|x+1|} - 3$ ,  $g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - |x|)$ , 则  $f(x)$  与  $g(x)$  图象的交点个数是

- A. 6                      B. 4                      C. 3                      D. 2

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 已知圆  $C$  的圆心坐标为  $(2, a)$ , 半径为  $r$ , 若直线  $x + 2y - 7 = 0$  与圆  $C$  相切于点  $(3, 2)$ , 则

- A.  $r = 5$     B.  $a = 0$   
C. 点  $(-1, -1)$  在圆  $C$  外                      D. 圆  $C$  被  $y$  轴截得的弦长为 1

10. 已知函数  $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\omega x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\omega > 0$ . 若  $f(x)$  图象中离  $y$  轴最近的对称轴

为  $x = \frac{\pi}{12}$ , 则

- A.  $\omega = 2$   
B.  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$   
C.  $f(x)$  图象的一个对称中心是  $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$   
D.  $f(x)$  的单调递增区间为  $\left[-\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$

11. 已知  $(e^x - ax)(x^2 - ax + 1) \geq 0$ , 则  $a$  的可能取值有

- A.  $-e$                       B.  $\ln 6$                       C.  $e^2$                       D.  $\frac{\pi}{2}$

12. 数系的扩充是数学发展的一个重要内容,1843 年,数学家哈密顿发现了四元数.四元数的产生是建立在复数的基础上的,和复数相似,四元数是实数加上三个虚数单位  $i, j$  和  $k$ , 而且它们有如下关系:  $i^2 = j^2 = k^2 = -1, i^0 = j^0 = k^0 = 1, ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j, ik = -j$ . 四元数一般可表示为  $a+bi+cj+dk$ , 其中  $a, b, c, d$  为实数. 定义两个四元数:  $\alpha = a_1+b_1i+c_1j+d_1k, \beta = a_2+b_2i+c_2j+d_2k$ , 那么这两个四元数之间的乘法定义如下:  $\alpha\beta = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i + (a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)k$ . 关于四元数, 下列说法正确的是

- A.  $ijk = -1$   
B.  $\alpha\alpha = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2$   
C.  $\alpha\beta = \beta\alpha$   
D. 若  $\alpha = 1 + i + j + k$ , 且  $\alpha\beta = 4$ , 则  $\beta = 1 - i - j - k$

数学试题 B 第 2 页(共 4 页)

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13.  $(x - \frac{3}{x})^3$  的展开式中  $x^3$  的系数是     ▲    .

14. 已知函数  $f(x) = \sin 2x - x, x \in (0, \pi)$ , 则  $f(x)$  的极大值点为     ▲    .

15. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 准线为  $l$ , 过  $F$  的直线交抛物线  $C$  于  $A, B$  两点, 交  $l$  于点  $P$ , 其中  $A$  在第一象限, 且  $|AF| = 2|BF|$ , 则直线  $AB$  的斜率为     ▲    , 若  $\triangle AOP$  的面积为  $3\sqrt{2}$ , 则  $p =$      ▲    . (第一空2分, 第二空3分)

16. 已知三棱锥  $A-BCD$  的棱长均为6, 三棱锥内有  $n$  个小球, 球  $O_1$  与三棱锥  $A-BCD$  的四个面都相切, 球  $O_2$  与三棱锥  $A-BCD$  的三个面和球  $O_1$  都相切, 以此类推, 球  $O_k$  与三棱锥  $A-BCD$  的三个面和球  $O_{k-1}$  都相切 ( $3 \leq k \leq n$ , 且  $k \in \mathbb{N}^+$ ), 则这  $n$  个小球的表面积之和等于     ▲    .

四、解答题:本题共6小题,共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

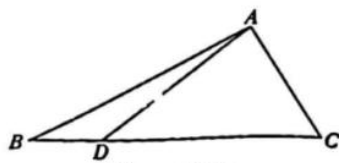
如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $D$  为边  $BC$  上一点,  $AB = 2\sqrt{3}, BD = 1, AD = \sqrt{7}$ .

(1) 求角  $B$ ;

(2) 从下面两个条件中选一个, 求角  $C$ .

①  $AC = 2, AD < CD$ ;

②  $\cos \angle DAC = \frac{\sqrt{7}}{14}$ .



(第17题图)

18. (12分)

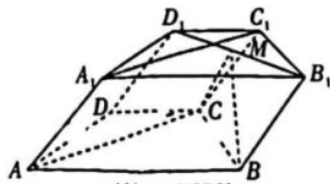
如图, 斜四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的底面  $ABCD$  为等腰梯形, 且  $AB \parallel CD$ , 点  $A_1$  在底面的射影点  $O$  在四边形  $ABCD$  内部, 且  $AD = BC = CD = AA_1 = 2, AB = 4, A_1O = 1, AA_1 \perp BC$ .

(1) 求证: 平面  $ABCD \perp$  平面  $ACC_1A_1$ ;

(2) 在线段  $B_1D_1$  上是否存在一点  $M$ , 使得平面  $MBC$  与平面

$ABCD$  夹角的余弦值为  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ , 若存在, 求  $\frac{B_1M}{B_1D_1}$  的值; 若

不存在, 请说明理由.



(第18题图)

19. (12分)

中国共产党第二十届中央委员会第二次全体会议于2023年2月26日至28日在北京召开. 会议提出, 要着力推动经济稳步回升, 促进高质量发展, 切实保障和改善民生. 为了适应新形势, 满足国内市场需求, 某对外零件加工企业积极转型, 新建了  $A, B$  两个车间, 加工同一型号的零件, 质检部门随机抽检了两个车间各100件零件, 在抽取的200件零件中, 根据检测结果将它们分为一级品、二级品、三级品三个等级, 一级品、二级品都是合格品, 在政策的扶持下, 都可以销售出去, 而三级品是次品, 必须销毁, 具体统计结果如表一所示:

表一

等级	一级品	二级品	三级品
频数	20	120	60

表二

	合格品	次品	合计
A	75		
B		35	
合计			

- (1) 请根据表一所提供的数据,完成 $2 \times 2$ 的列联表(表二),依据 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验,能否认为零件的合格率与生产车间有关?
- (2) 每个零件的生产成本为30元,一级品、二级品零件的出厂单价分别为 $3a$ 元, $2a$ 元( $a > 15$ ),每件次品的销毁费用为4元.用样本的频率估计总体的概率,已知B车间抽检的零件中有10件为一级品,并利用表一、表二的数据,若A、B两车间都能盈利,求实数 $a$ 的取值范围.

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a + b + c + d.$$

$\alpha$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05
$\chi_{\alpha}$	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841

20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ , $F$ 为 $C$ 的右焦点,过点 $F$ 作与 $x$ 轴不重合的直线 $l$ ,交 $C$ 于 $A, B$ 两点,当 $l$ 与 $y$ 轴平行时, $|AB| = 3$ .

- (1) 求 $C$ 的方程;
- (2)  $P$ 为 $C$ 的左顶点,直线 $PA, PB$ 分别交直线 $x = 4$ 于 $D, E$ 两点,求 $\overline{FD} \cdot \overline{FE}$ 的值.

21. (12分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$ 满足关系式 $\frac{6S_1}{a_1 + 3} + \frac{6S_2}{a_2 + 3} + \dots + \frac{6S_n}{a_n + 3} = S_n, n \in \mathbb{N}^*$ .

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设 $T_n = (-1)^{s_1} a_1 + (-1)^{s_2} a_2 + \dots + (-1)^{s_n} a_n, n \in \mathbb{N}^*$ ,证明 $|T_n| < 4n, n \geq 3$ .

22. (12分)

已知 $a > 0$ ,函数 $f(x) = a(x+1)\ln x - x + 1$ .

- (1) 若 $f(x)$ 是增函数,求 $a$ 的取值范围;
- (2) 证明:当 $0 < a < \frac{1}{2}$ ,且 $a \neq \frac{1}{e}$ 时,存在三条直线 $l_1, l_2, l_3$ 是曲线 $y = \ln x$ 的切线,也是曲线 $y = a\left(x - \frac{1}{x}\right)$ 的切线.

数学试题B 第4页(共4页)

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

