高二文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合$A=\{x|x^2-3x-10\leqslant 0\}$，$B=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，则$A\cap B$的子集的个数是

A. 3　　B. 4　　C. 7　　D. 8

2. 若复数z满足$z\cdot(2-i)=2i+3$（i为虚数单位），则$\bar{z}$在复平面内对应的点位于

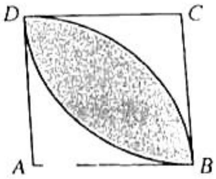
A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知直线$l_1:(a-2)x+ay+2=0$，$l_2:x+(a-2)y+a=0$，则“$l_1\perp l_2$”是“$a=-1$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 如图，已知正方形$ABCD$的边长为$a\,(a>0)$，分别以点A，C为圆心，a为半径作圆，在正方形内随机取一点，则此点取自阴影部分的概率是



A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{2}-1$　　D. $\frac{\pi}{3}-1$

5. 设单位向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，则向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

6. 春天是一个美丽、神奇，充满希望的季节，我们每个人都应当保持像春天一样朝气蓬勃的生命力，去创造属于我们自己的美好生活。随着2022年春天的深入，某池塘中的荷花枝繁叶茂，已知每经过一天的生长，荷叶覆盖水面面积都是前一天的$\frac{5}{4}$倍，若荷叶20天可以完全长满池塘水面，则当荷叶刚好覆盖水面面积一半时，荷叶大约生长了（参考数据$\lg 2\approx 0.3$）

A. 17天　　B. 15天　　C. 12天　　D. 10天

7. 已知$3\tan 10°+\lambda\cos 80°=\sqrt{3}$，则实数$\lambda$的值为

A. 4　　B. $4\sqrt{3}$　　C. $3\sqrt{3}$　　D. 2

8. 已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-3\leq 0, \\ x-2y-3\leq 0, \\ x\geq m, \end{cases}$ 若目标函数 $z=y-2x$ 的最大值是 7，则实数 $m=$

A. $-\frac{17}{3}$　　B. $-\frac{4}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{7}{3}$

9. 设 F_1,F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{45}=1$ 的左、右焦点，P 是该双曲线上的一点，且 $3|PF_1|=5|PF_2|$，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积等于

A. $14\sqrt{3}$　　B. $7\sqrt{15}$　　C. $15\sqrt{3}$　　D. $5\sqrt{15}$

10. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，且 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=\sqrt{3}AB$，则直线 PB 与直线 AC 所成角的余弦值是

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{8}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{8}$

11. 已知直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\sqrt{x}+1$ 的切线，则 k^2+b^2-2b 的最小值为

A. $-\frac{1}{2}$　　B. 0　　C. $\frac{5}{4}$　　D. 3

12. 在$\triangle ABC$ 中，$AB=BC$，点 D 是边 AB 的中点，$\triangle ABC$ 的面积为$\sqrt{2}$，则线段 CD 的取值范围是

A. $\left(0,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{3\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$　　C. $[\sqrt{3},+\infty)$　　D. $(0,\sqrt{3}]$

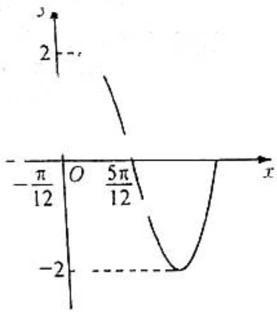
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $f(x)=\begin{cases} x-3,(x<1), \\ f(x-4),(x\geq 1), \end{cases}$ 则 $f(2\,022)=$______.

14. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=2\sqrt{3}$，$AA_1=6$，$\angle ACB=30°$，则此直三棱柱的外接球的表面积是______.

15. 已知抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点是 F，过 F 的直线 l 交 C 于不同的 A,B 两点，则$(|AF|+1)\cdot|BF|$的最小值是______.

16. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示．将函数 $y=f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位，得到 $y=g(x)$的图象，则下列有关 $f(x)$与 $g(x)$的描述正确的有______.（填序号）



①方程 $f(x)+g(x)=\sqrt{6}\left(x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)\right)$所有根的和为$\frac{7\pi}{12}$；

②不等式$\frac{g(x)}{f(x)}\geq\sqrt{3}$的解集为$\left[\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},\frac{5\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

③函数 $y=f(x)$与函数 $y=g(x)$图象关于 $x=\frac{7\pi}{24}$对称.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{1}{n(n+1)}(n\in\mathbf{N}^*)$，且$a_1=1$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{a_n}{3^{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

18.（本小题满分 12 分）

棉花是我国主要经济作物、纺织工业原料、重要战略物资. 量化我国棉花生产碳足迹，解析其时空变化规律，阐明其主要构成因素与影响要素，对于“碳达峰，碳中和”愿景下我国棉花绿色可持续生产具有重要意义. 某地因地制宜发展特色棉花种植，随着人们种植意识的提升和科技人员的大力指导，越来越多的农田开始种植棉花，近 4 年该地区棉花种植面积如下表：（单位：百亩）

年度	2018	2019	2020	2021
年度代码 x	1	2	3	4
种植面积 y	306	347	390	420

（1）请利用所给数据求棉花种植面积 y 与年度代码 x 之间的回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，并估计该地区 2022 年棉花的种植面积；

（2）针对近几年来棉花出现的生理性蕾铃脱落以及棉花枯、黄萎病等问题，某科研小组随机抽查了 100 亩棉花，对是否按时足量施用硼肥和棉花产量进行统计得到如下数据：

	亩产≥110 kg	亩产<110 kg
未按时足量施用硼肥	20 a	10 b
按时足量施用硼肥	58 c	12

问：是否有 90% 的把握认为棉花产量与是否按时足量施用硼肥有关？

参考公式：线性回归方程：$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$，

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}，其中 n=a+b+c+d.$$

临界值表：

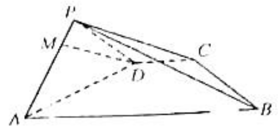
$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.01
k_0	2.072	2.706	3.841	6.635

19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB/\!/DC$，$PA=PD=2$，$AB=4$，$DC=1$，$AD=BC=2\sqrt{2}$.

(1)求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积；

(2)在线段 PA 上是否存在点 M，使得 $DM/\!/$ 平面 PBC？若存在，求 $\frac{PM}{AM}$ 的值；若不存在，请说明理由.



20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1,A_2，$|A_1A_2|=4$，且过点 $\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

(1)求 C 的方程；

(2)若直线 $l:y=k(x-4)(k\neq0)$ 与 C 交于 M,N 两点，直线 A_1M 与 A_2N 相交于点 G，证明：点 G 在定直线上，并求出此定直线的方程.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x\sin x+\cos x$.

(1)讨论 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调性；

(2)若 $g(x)=\frac{x}{4}-f(x)+1$，证明：函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有且仅有三个零点.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）**选修 4－4：坐标系与参数方程**

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos\alpha,\\ y=2+\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）. 以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求 C 的普通方程；

(2)已知点 P 的直角坐标为 $(-1,2)$，过点 P 作 C 的切线，求切线的极坐标方程.

23.（本小题满分 10 分）**选修 4－5：不等式选讲**

已知函数 $f(x)=|x-m|+|x+2|$.

(1)若 $f(x)\geqslant4$ 的解集为 $\mathbf{R}$，求正数 m 的取值范围；

(2)若 $m=2$，函数 $f(x)$ 的最小值为 t，$a+b+c=t$，

求证：$(a-1)^2+(b+1)^2+(c+2)^2\geqslant12$.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. D　因为 $A=\{x|x^2-3x-10<0\}=(-2,5)$，$B=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，所以 $A\cap B=\{-1,1,3\}$，所以 $A\cap B$ 的子集的个数是 8. 故选 D.

2. D　由 $z\cdot(2-\mathrm{i})=2\mathrm{i}+3$，所以 $z=\frac{2\mathrm{i}+3}{2-\mathrm{i}}=\frac{(2\mathrm{i}+3)(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\frac{4}{5}+\frac{7}{5}\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}=\frac{4}{5}-\frac{7}{5}\mathrm{i}$，在复平面内对应的点是 $\left(\frac{4}{5},-\frac{7}{5}\right)$，位于第四象限. 故选 D.

3. B　由题意，直线 $l_1:(a-2)x+ay+2=0$，$l_2:x+(a-2)y+a=0$，当 $l_1\perp l_2$ 时，可得 $(a-2)\times1+a(a-2)=(a-2)(a+1)=0$，解得 $a=-1$ 或 $a=2$，所以"$l_1\perp l_2$"是"$a=-1$"的必要不充分条件. 故选 B.

4. C　阴影部分可拆分为两个小弓形，则阴影部分面积 $S'=2\times\left(\frac{1}{4}\pi\times a^2-\frac{1}{2}\times a^2\right)=\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)a^2$，正方形面积 $S=a^2$，

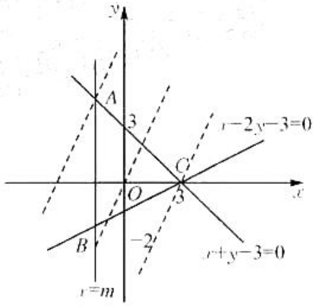
∴所求概率 $P=\frac{S'}{S}=\frac{\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2}{a^2}=\frac{\pi}{2}-1$. 故选 C.

5. B　设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 两边平方得 $6|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=3$，所以 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，因为 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

6. A　设荷叶覆盖水面的初始面积为 a，则 x 天后荷叶覆盖水面的面积 $y=a\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^x(x\in\mathbf{N}^*)$，根据题意，令 $2a\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^x=a\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{20}$，即 $2^{41-2x}=5^{20-x}$，两边取以 10 为底的对数得 $(41-2x)\lg2=(20-x)\lg5$，所以 $(41-2x)\times0.3=(20-x)\times0.7$ 解得 $x=17$. 故选 A.

7. B　根据已知得 $3\sin10^\circ+\lambda\sin10^\circ\cos10^\circ=\sqrt{3}\cos10^\circ$，所以 $\frac{\lambda}{2}\sin20^\circ=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin10^\circ\right)=2\sqrt{3}\sin20^\circ$，解得 $\lambda=4\sqrt{3}$. 故选 B.

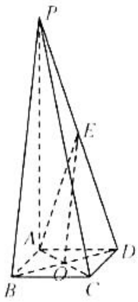
8. B　由 $\begin{cases}x+y-3=0,\\x-2y-3=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=0,\end{cases}$ 若 $m>3$，则没有满足不等式组的解，所以 $m\leqslant3$，作出不等式组 $\begin{cases}x+y-3\leqslant0,\\x-2y-3\leqslant0,\\x\geqslant m\end{cases}$ 所表示的可行域(图中阴影部分所示).



平移直线 $y=2x$，由图可见，当动直线 $y=2x+z$ 过点 A 时，直线 $y=2x+z$ 在 y 轴上的截距 z 取最大值，由 $\begin{cases}x+y-3=0,\\x=m\end{cases}$ 解得 $A(m,3-m)$，将点 A 坐标代入直线 $z=y-2x$，得 $3-m-2m=7$，解得 $m=-\frac{4}{3}$. 故选 B.

9. C　设 $|PF_1|=5x$，$|PF_2|=3x$，则由双曲线的定义可得 $|PF_1|-|PF_2|=5x-3x=2x=2a=4$，所以 $x=2$，故 $|PF_1|=10$，$|PF_2|=6$，又 $|F_1F_2|=14$，故 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{100+36-196}{2\times10\times6}=-\frac{1}{2}$，故 $\sin\angle F_1PF_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为

$\frac{1}{2}\times 10\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}$. 故选 C.

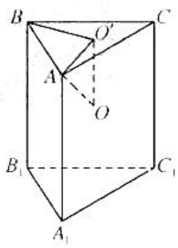


10. A　连接 BD 交 AC 于点 O，取 PD 的中点 E，连接 EO，EA. 不妨设 $AB=1$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 O 是 BD 的中点. 又 E 是 PD 的中点，所以 $OE\parallel PB$. 所以直线 PB 与直线 AC 所成角即为 $\angle EOA$(或其补角). 因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，又 AB，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$，$PA\perp AD$. 在 $\triangle PAD$ 中，$PA\perp AD$，$PA=\sqrt{3}$，$AD=1$，所以 $AE=1$；在 $\triangle PAB$ 中，$PA\perp AB$，$PA=\sqrt{3}$，$AB=1$，所以 $PB=2$，所以 $EO=1$；在 $\triangle AOE$ 中，$AE=1$，$AO=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$EO=1$，所以 $\cos\angle AOE=\frac{AO^2+OE^2-AE^2}{2\cdot AO\cdot OE}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，即直线 PB 与直线 AC 所成角的余弦值是 $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 故选 A.

11. A　设直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=\sqrt{x}+1$ 相切于点 $(x_0,\sqrt{x_0}+1)(x_0\geqslant 0)$，当 $x_0=0$ 时，直线 $y=b$ 不是曲线 $y=\sqrt{x}+1$ 的切线，故 $x_0>0$. 由 $y=\sqrt{x}+1$ 得 $y'\big|_{x=x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$，所以切线方程为 $y-(\sqrt{x_0}+1)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)$，即 $y=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x+\frac{\sqrt{x_0}}{2}+1$，所以 $\begin{cases}k=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},\\ b=\frac{\sqrt{x_0}}{2}+1,\end{cases}$ 所以 $k(b-1)=\frac{1}{4}$，所以 $k^2+b^2-2b=k^2+(b-1)^2-1\geqslant 2k(b-1)-1=-\frac{1}{2}$，当且仅当 $k=b-1=\frac{1}{2}$ 即 $x_0=1$ 时，等号成立，所以 k^2+b^2-2b 的最小值为 $-\frac{1}{2}$. 故选 A.

12. C　设 $AB=BC=t$，$CD=m$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}t^2\sin B=\sqrt{2}$，即 $t^2\sin B=2\sqrt{2}$　①，由余弦定理得 $m^2=t^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2-2\cdot t\cdot\frac{t}{2}\cos B$，即 $t^2\cos B=\frac{5}{4}t^2-m^2$　②，由①②得：$t^4=\left(\frac{5}{4}t^2-m^2\right)^2+8$，即 $9t^4-40m^2t^2+16m^4+128=0$，令 $t^2=x>0$，设 $g(x)=9x^2-40m^2x+16m^4+128$，则方程 $g(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，所以 $g\left(\frac{20m^2}{9}\right)=9\left(\frac{20m^2}{9}\right)^2-40m^2\times\frac{20m^2}{9}+16m^4-128\leqslant 0$，解得 $m^4\geqslant 9$，即 $m\geqslant\sqrt{3}$. 故选 C.

13. -5　$f(2\,022)=f(4\times 505+2)=f(2)=f(-2)=-2-3=-5$.



14. 84π　如图所示，设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 r，则 $2r=\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}$，解得 $r=2\sqrt{3}$. 设直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的球半径为 R，所以 $R=\sqrt{r^2+\left(\frac{AA_1}{2}\right)^2}=\sqrt{21}$，所以该直三棱柱外接球的表面积是 $S=4\pi R^2=84\pi$.

15. $2\sqrt{2}+3$　由题意知，$F(0,1)$，显然直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}x^2=4y,\\ y=kx+1,\end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4=0$，所以 $x_1x_2=-4$，所以 $y_1y_2=\frac{x_1^2}{4}\cdot\frac{x_2^2}{4}=1$，所以 $(|AF|+1)\cdot|BF|=(y_1+1+1)(y_2+1)=y_1y_2+y_1+2y_2+2=y_1+2y_2+3\geqslant 2\sqrt{y_1\cdot 2y_2}+3=2\sqrt{2}+3$，当且仅当 $y_1=\sqrt{2}$，$y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立.

16. ②③　对于①，$y=f(x)+g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)$，由 $2\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{6}$，得 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $0<x<\frac{3}{2}\pi$，所以 $-\frac{\pi}{12}<2x-\frac{\pi}{12}<\frac{35\pi}{12}$，所以 $x=\frac{5\pi}{24}$ 或 $x=\frac{3\pi}{8}$ 或 $x=\frac{29\pi}{24}$ 或 $x=\frac{11\pi}{8}$，所以在给

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

定范围内方程根的和为$\frac{19\pi}{6}$，故①错误；对于②，$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\geqslant\sqrt{3}$，所以$\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$x\in\left[\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，故②正确；对于③，因为$f\left(\frac{7\pi}{12}-x\right)=2\sin\left(\frac{7\pi}{6}-2x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=g(x)$，所以$y=f(x)$与$y=g(x)$图象关于$x=\frac{7\pi}{24}$对称，故③正确.

17. 解：(1)因为$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，…………………………………… 2 分

所以$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n-1}}{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}(n\geqslant 2)$，

$\frac{a_{n-1}}{n-1}-\frac{a_{n-2}}{n-2}=\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}$，

…

$\frac{a_2}{2}-\frac{a_1}{1}=1-\frac{1}{2}$，

所以$\frac{a_n}{n}-a_1=1-\frac{1}{n}(n\geqslant 2)$. …………………………………… 4 分

又$a_1=1$，所以$\frac{a_n}{n}=\frac{2n-1}{n}$，所以$a_n=2n-1(n\geqslant 2)$. …………………………………… 5 分

又$a_1=1$，也符合上式，

所以$a_n=2n-1$. …………………………………… 6 分

(2)结合(1)得$b_n=\frac{2n-1}{3^{n-1}}$，所以

$S_n=\frac{1}{3^0}+\frac{3}{3^1}+\frac{5}{3^2}+\frac{7}{3^3}+\cdots+\frac{2n-1}{3^{n-1}}$， ①

$\frac{1}{3}S_n=\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\cdots+\frac{2n-1}{3^n}$， ②

①−②，得$\frac{2}{3}S_n=1+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{3^n}$

$=1+\frac{2\times\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{3}}-\frac{2n-1}{3^n}=2-\frac{2n+2}{3^n}$，…………………………………… 10 分

所以$S_n=3-\frac{n+1}{3^{n-1}}$. …………………………………… 12 分

18. 解：(1)根据题意得到$\bar{x}=\frac{1}{4}\times(1+2+3+4)=2.5$，$\bar{y}=\frac{1}{4}\times(306+347+390+420)=365.75$. ………… 2 分

因为$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_iy_i-4\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{4}x_i^2-4\bar{x}^2}=\frac{3\ 850-4\times 2.5\times 365.75}{30-4\times 2.5\times 2.5}=38.5$，$\hat{a}=365.75-38.5\times 2.5=269.5$，

所以$\hat{y}=38.5x+269.5$. …………………………………… 4 分

所以棉花种植面积y与年度代码x之间的回归直线方程$\hat{y}=38.5x+269.5$.

当$x=5$时，$\hat{y}=38.5\times 5+269.5=462$，

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

所以估计该地区 2022 年棉花的种植面积为 462 百亩. …………………………………………………… 6 分

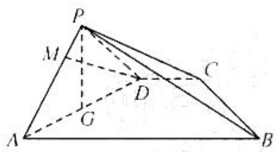
(2)结合已知数据得到 2×2 列联表如下表所示：

	亩产≥110 kg	亩产<110 kg	合计
未按时足量施用硼肥	20	10	30
按时足量施用硼肥	58	12	70
合计	78	22	100

$K^2=\dfrac{100\times(20\times12-58\times10)^2}{78\times22\times30\times70}\approx3.208>2.706$. …………………………………………………… 10 分

所以有 90% 的把握认为棉花产量与是否按时足量施用硼肥有关. …………………………………… 12 分

19. 解：(1)取 AD 的中点 G，连接 PG，如下图所示：



$\because PA=PD=2$，$\therefore PG\perp AD$. …………………………………………………… 1 分

$\because$ 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PG\subset$ 平面 PAD，

$\therefore PG\perp$ 平面 $ABCD$，即 PG 是四棱锥 $P-ABCD$ 的高. …………………………………… 3 分

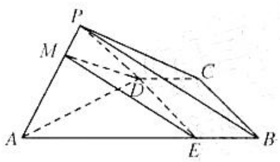
$\because PA=PD=2$，$AD=2\sqrt{2}$，$\therefore PA^2+PD^2=AD^2$，$\therefore PA\perp PD$，$PG=\sqrt{2}$.

在四边形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$DC=1$，$AD=BC=2\sqrt{2}$，$AB/\!/DC$，$S_{ABCD}=\dfrac{(1+4)\times\dfrac{\sqrt{23}}{2}}{2}=\dfrac{5\sqrt{23}}{4}$，

$\therefore$ 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\dfrac{5\sqrt{23}}{4}=\dfrac{5\sqrt{46}}{12}$. …………………………………… 6 分

(2)过点 D 作 $DE/\!/CB$ 交 AB 于点 E，则 $\dfrac{EB}{AE}=\dfrac{1}{3}$.

过点 E 作 $EM/\!/PB$ 交 PA 于点 M，连接 MD，则 $\dfrac{PM}{MA}=\dfrac{1}{3}$.



$\because DE/\!/BC$，$BC\subset$ 平面 PBC，$DE\not\subset$ 平面 PBC，$\therefore DE/\!/$ 平面 PBC. …………………… 7 分

$\because ME/\!/PB$，$PB\subset$ 平面 PBC，$ME\not\subset$ 平面 PBC，$\therefore ME/\!/$ 平面 PBC. …………………… 8 分

又 $\because DE\cap ME=E$，DE，$ME\subset$ 平面 MDE，$\therefore$ 平面 $MDE/\!/$ 平面 PBC. …………………… 9 分

$\because MD\subset$ 平面 MDE，$\therefore MD/\!/$ 平面 PBC. …………………………………………………… 10 分

所以在 PA 上存在点 M，使得 $DM/\!/$ 平面 PBC，且 $\dfrac{PM}{MA}=\dfrac{1}{3}$. …………………………………… 12 分

20. (1)解：因为 $|A_1A_2|=4$，所以 $2a=4$，解得 $a=2$. …………………………………………… 1 分

因为 C 过点 $\left(\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$，所以 $\dfrac{(\sqrt{2})^2}{4}+\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}{b^2}=1$. …………………………………………… 2 分

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

解得 $b=\sqrt{3}$. ………… 3分

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………… 4分

(2)证明:设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,所以 $l_{A_1M}:y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$,$l_{A_2N}:y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$. ………… 6分

由 $\begin{cases}y=k(x-4),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 整理得 $(3+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$,

则 $\Delta=(-32k^2)^2-4(3+4k^2)(64k^2-12)>0$,

解得 $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$ 且 $k\neq0$,$x_1+x_2=\frac{32k^2}{3+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{64k^2-12}{3+4k^2}$. ………… 8分

由 $\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2),\\ y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2),\end{cases}$ 得 $x=\frac{\frac{2y_2}{x_2-2}+\frac{2y_1}{x_1+2}}{\frac{y_2}{x_2-2}-\frac{y_1}{x_1+2}}=\frac{2k(x_2-4)(x_1+2)+2k(x_1-4)(x_2-2)}{k(x_2-4)(x_1+2)-k(x_1-4)(x_2-2)}=\frac{2x_1x_2-6x_1-2x_2}{3x_2-x_1-8}$

$=\frac{2x_1x_2-2(x_1+x_2)-4x_1}{3(x_1+x_2)-8-4x_1}=\frac{2\times\frac{64k^2-12}{3+4k^2}-2\times\frac{32k^2}{3+4k^2}-4x_1}{3\times\frac{32k^2}{3+4k^2}-8-4x_1}=1$, ………… 10分

所以点 G 在定直线 $x=1$ 上. ………… 12分

21. (1)解:$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$, ………… 1分

令 $f'(x)=0$,则 $x=\frac{\pi}{2}$. ………… 2分

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,递减区间是 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. ………… 4分

(2)证明:$g(x)=\frac{x^2}{4}-x\sin x-\cos x+1$.

因为 $g(0)=0$,所以 0 是 $g(x)$ 的一个零点. ………… 5分

又 $g(-x)=\frac{(-x)^2}{4}-(-x)\sin(-x)-\cos(-x)+1=\frac{x^2}{4}-x\sin x-\cos x+1=g(x)$,

所以 $g(x)$ 是偶函数,

即要确定 $g(x)$ 在 **R** 上的零点个数,需确定 $x>0$ 时,$g(x)$ 的零点个数即可. ………… 6分

①当 $x>0$ 时,$g'(x)=\frac{x}{2}-x\cos x=\frac{x}{2}(1-2\cos x)$,

令 $g'(x)=0$,即 $\cos x=\frac{1}{2}$,$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ 或 $x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{N})$.

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减,且 $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi^2}{36}-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+\frac{1}{2}<0$.

当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5}{3}\pi\right)$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增,且 $g\left(\frac{5}{3}\pi\right)=\frac{25}{36}\pi^2+\frac{5\sqrt{3}}{6}\pi+\frac{1}{2}>0$.

官方微信公众号:zizzsw　咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com　微信客服:zizzs2018

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{5}{3}\pi\right)$ 上有唯一零点. …… 8 分

②当 $x\geqslant\frac{5}{3}\pi$ 时，由于 $\sin x\leqslant1,\cos x\leqslant1$.

$g(x)=\frac{x^2}{4}-x\sin x-\cos x+1\geqslant\frac{x^2}{4}-x-1+1=\frac{x^2}{4}-x=t(x)$， …… 9 分

而 $t(x)$ 在 $\left[\frac{5}{3}\pi,+\infty\right)$ 单调递增，$t(x)\geqslant t\left(\frac{5}{3}\pi\right)>0$.

所以 $g(x)>0$ 恒成立，故 $g(x)$ 在 $\left[\frac{5}{3}\pi,+\infty\right)$ 无零点， …… 10 分

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有一个零点. …… 11 分

由于 $g(x)$ 是偶函数，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 有一个零点，而 $g(0)=0$，

综上所述，函数 $g(x)$ 在 **R** 上有且仅有三个零点. …… 12 分

22. 解：(1)曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos\alpha,\\ y=2+\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），

所以 C 的普通方程是 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$. …… 3 分

(2)由题意，切线的斜率一定存在，设切线方程为 $y-2=k(x+1)$，即 $kx-y+k+2=0$，

所以 $\frac{|k-2+k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$， …… 6 分

解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. …… 7 分

所以切线方程是 $\sqrt{3}x-3y+\sqrt{3}+6=0$ 或 $\sqrt{3}x+3y+\sqrt{3}-6=0$， …… 8 分

将 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$ 代入，

化简得 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-\sqrt{3}$ 或 $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{1}{2}$. …… 10 分

23. (1)解：根据题意得 $|x-m|+|x+2|\geqslant|x-m-(x+2)|=|m+2|$，

所以 $|m+2|\geqslant4$，解得 $m\leqslant-6$ 或 $m\geqslant2$. …… 3 分

又因为 $m>0$，所以 $m\geqslant2$，

所以正数 m 的取值范围为 $[2,+\infty)$. …… 5 分

(2)证明：因为 $m=2$，所以 $f(x)=|x-2|+|x+2|\geqslant|2-x+x+2|=4$，

所以 $t=4$，所以 $a+b+c=4$，所以 $(a-1)+(b+1)+(c+2)=6$， …… 7 分

两边平方得，

$(a-1)^2+(b+1)^2+(c+2)^2+2(a-1)(b+1)+2(b+1)(c+2)+2(a-1)(c+2)=36$.

因为 $(a-1)^2+(b+1)^2\geqslant2(a-1)(b+1)$，$(a-1)^2+(c+2)^2\geqslant2(a-1)(c+2)$，

$(b+1)^2+(c+2)^2\geqslant2(b+1)(c+2)$，（当且仅当 $a-1=b+1=c+2=2$ 时取等号），

所以 $3(a-1)^2+3(b+1)^2+3(c+2)^2\geqslant36$，

所以 $(a-1)^2+(b+1)^2+(c+2)^2\geqslant12$. …… 10 分

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。