

2021 届高三 信息押题卷(一) 新高考卷 数 学 试 卷

注意事项:

- 1.答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
- 3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟,满分 150 分

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 1.已知集合 $A = \{x | \frac{x+1}{x-1} \geq 0\}$, $B = \{x | \log_2 |x| > 0\}$, 则 $A \cap B =$

A. $\{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 1\}$ B. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$
C. $\{x | -1 < x < 1\}$ D. $\{x | -1 \leq x < 1\}$

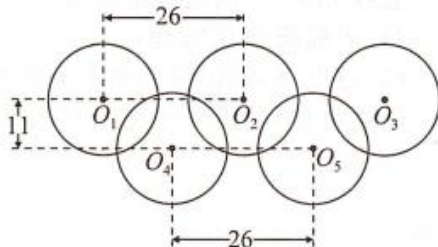
- 2.向量 $a = (2, 2)$, $b = (m, 2)$, 若 $(a - b) \perp a$, 则 $m =$

A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

- 3.在“乡村振兴”行动中,为了了解村民的收入情况,某村的驻村工作小组统计了该村村民的户均年收入(单位:万元),发现村民的户均年收入 $\xi \sim N(4, 0.25)$, 则该村村民户均年收入在 3 万元以上的概率为。(参考数据: $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) = 0.683$, $P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) = 0.954$)

A. 0.977 B. 0.954 C. 0.683 D. 0.8415

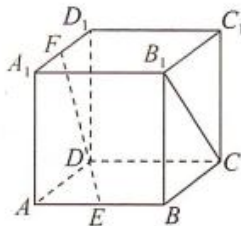
- 4.第 24 届冬季奥林匹克运动会, 又称 2022 年北京冬季奥运会, 将于 2022 年 2 月在北京和张家口举行, 北京冬奥会会徽以汉字“冬”为灵感来源, 运用中国书法的艺术形态, 将厚重的东方文化底蕴与国际化的现代风格融为一体, 呈现出新时代的中国新形象、新梦想。会徽图形上半部分展现滑冰运动员的造型, 下半部分表现滑雪运动员的英姿。中间舞动的线条流畅且充满韵律, 代表举办地起伏的山峦、赛场、冰雪滑道和节日飘舞的丝带, 下部为奥运五环, 不仅象征五大洲的团结, 而且强调所有参赛运动员应以公正、坦诚的运动员精神在比赛场上相见。其中奥运五环的大小和间距按以下比例(如图): 若圆半径均为 12, 则相邻圆圆心水平距离为 26, 两排圆圆心垂直距离为 11, 设五个圆的圆心分别为 O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 , 若双曲线 C 以 O_1, O_3 为焦点、以直线 O_2O_4 为一条渐近线, 则 C 的离心率为



A. $\frac{\sqrt{290}}{13}$ B. $\frac{\sqrt{290}}{11}$ C. $\frac{13}{11}$ D. 2

- 5.如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 AB 的中点, F 为 A_1D_1 的中点, 则异面直线 EF 和 B_1C 所成角的余弦值为

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$





6. 李老师家防盗门的密码锁密码是由数字 0—9 组成的六位数字(可以重复), 李老师忘记了密码的第 2、3、4 个数, 只记得都不为零, 且第 2 个数是 2 的倍数, 第 3 个数是 3 的倍数, 第 4 个数是 4 的倍数, 若上一次输入的错误密码不再重复输入, 则李老师第三次输入密码才能打开门的概率为.

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{23^2}{24^3}$

C. $\frac{1}{24}$

D. $1 - \frac{1}{24^3}$

7. 已知函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 若 $a = \frac{3}{2}f(\frac{3}{2})$, $b = \frac{1}{2}f(\frac{1}{2})$, $c = -2f(-2)$, 则 a, b, c 的大小关系为

A. $a > b > c$

B. $c > b > a$

C. $c > a > b$

D. $b > a > c$

8. 学校要选派 A、B、C、D、E 五位同学到甲、乙、丙三个社区参加社会实践活动, 若 A 和 B 不能去同一个社区, A 和 C 必须去同一个社区, 且每个社区至少选派一名同学, 则不同的选派方法共有

A. 66 种

B. 30 种

C. 24 种

D. 36 种

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分.

9. 已知 $a > b, c \in \mathbf{R}$, 且 $ab > 0$, 则

A. $\frac{a}{b} > 1$

B. $ac^2 > bc^2$

C. $2^{a-b} > 1$

D. $a^2 + b^2 > 2ab$

10. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 直线 l 过点 F 与抛物线交于 A、B 两点, M 为抛物线上的动点, 则下列结论正确的是

A. 若 l 垂直 x 轴, 且 $|AB| = 4$, 则抛物线方程为 $y^2 = 4x$

B. 若 $|MF|$ 的最小值为 2, 则 $p = 2$

C. 过点 $(-\frac{p}{2}, 0)$ 作抛物线的两条切线, 两条切线互相垂直

D. 以 AB 为直径的圆与抛物线的准线相切

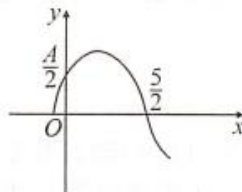
11. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示, 则

A. $\varphi = \frac{\pi}{6}$

B. $f(x)$ 的最小正周期 $T = 6$

C. 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位得到函数 $g(x) = A \sin \frac{\pi}{3}x$ 的图象

D. 直线 $x = \frac{3}{2}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴



12. 设定义域为 $(0, +\infty)$ 的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若 $f(e) = 1, f(x) = \ln x - x f'(x)$, 则其中正确的为

A. $f'(e) = 0$

B. 函数 $F(x) = x f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得最小值

C. $f(x)$ 有且只有一个零点

D. $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增.

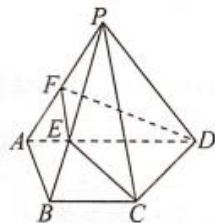
三、填空题: 本大题有 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在题中横线上.

13. 若复数 $z = \frac{1-i}{i}$, 则 $|z+2| =$ _____.

14. 若 $(1+ax)^2(x+\frac{2}{x})^5$ 的展开式中 x^5 的系数为 25, 则实数 a 的值为 _____.

15. 为了全面贯彻党的十九大精神, 构建和谐社会, 建设社会主义新农村, 改善农村人居环境, 助力乡村振兴, 某县决定对全县的荒山实施造林绿化, 已知该县现有荒山 20 万亩, 计划今年绿化 1 万亩, 并从第二年开始, 每年绿化面积是上一年的 1.5 倍, 但由于新栽的树苗根系不够发达, 上一年绿化的荒山第二年又有 10% 被“荒化”, 则要使荒山的绿化率达到 75%, 大约需要 _____ 年 (结果取整数). (参考数据: $\lg 2 \approx 0.3$, $\lg 3 \approx 0.48$, $\lg 7 \approx 0.85$).

16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 为梯形, 且 $BC = \frac{1}{2}AD$, $BC \parallel AD$, 点 F 为 PA 中点, 过 F 和 CD 的平面与 PB 交于点 E , 若 $\overrightarrow{BE} = n \overrightarrow{EP}$, 则 $n =$ _____.



四、解答题: 本大题有 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 在 ① $a_1 = 1, S_6 - S_3 = 27$, ② $S_n = a_n + (n-1)^2$, ③ $a_3 + a_5 = 14, a_6 + a_8 = 26, S_3 = 9$ 这三个条件中任选一个, 补充到下面的问题中, 并给出解答.

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公差为 d , 且 _____.

注: 如果选择多个条件分别作答, 按第一个解答计分.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = 2^{n-1}a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

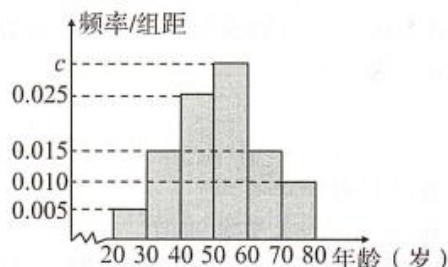
18. (12 分) 已知 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边, $b \sin A + 2a \sin^2 \frac{B}{2} = a$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $a = 4$, $\triangle ABC$ 的面积为 6, D 为边 AB 上靠近 B 点的三等分点, 求 CD 长.

19. (12 分) 随着服务型社会的进一步推进, 政府职能的进一步转换, 公众对政府公共服务质量有了更高的要求, 政府也越来越重视公众对政府满意度的测评, 通过量表调查问卷可以对抽象的满意度有更客观的了解. 为此, 某市政府开展了“凝聚公民监督力量, 推动城市进步”为主题的问卷活动, 面向全市人民开展政务服务满意度调查. 现从参加调查的市民中随机抽取 200 名, 按年龄 (单位: 岁) 进行统计, 得到的数据如下:

分组 (岁)	频数
[20, 30)	10
[30, 40)	a
[40, 50)	50
[50, 60)	b
[60, 70)	30
[70, 80]	20



(1) 求 a, b, c 的值;

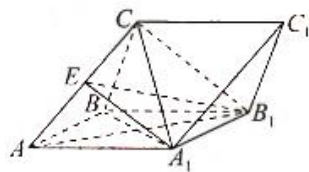
(2)在这 200 名市民中,从年龄在 $[50,70)$ 的市民中用分层抽样的方法抽取 9 人参加现场电视问政活动,活动中再从这 9 人中随机抽取 5 人授予“热心市民”称号.设这 5 人中年龄在 $[60,70)$ 内的人数为 ξ ,求 ξ 的分布列和期望.

20.(12 分)如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,四边形 AA_1B_1B 为菱形, $\angle BAA_1 = \frac{\pi}{3}$,

$$AB=BC=A_1C=2, B_1C=\sqrt{6}.$$

(1)证明:平面 $A_1BC \perp$ 平面 AB_1C ;

(2)在线段 AC 上是否存在异于 A, C 的点 E ,使二面角 $E-A_1B_1-B$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$,若存在,求 AE 的长,若不存在,请说明理由.



21.(12 分)已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$,且圆 $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ 上的点到直线 $l: x = 4$ 的最大距离为 $4 + \sqrt{3}$.

(1)求椭圆 E 的方程;

(2)过点 $N(1,0)$ 且斜率不为零的直线 l_1 交椭圆 E 于 A, B 两点,若直线 AC 垂直于直线 l ,垂足为点 C ,证明:直线 BC 与 x 轴的交点为定点.

22.(12 分)已知函数 $f(x) = x^2 - 2\ln x$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间;

(2)设 $F(x) = f(x) - x$,其导函数为 $F'(x)$,若 x_1, x_2 为函数 $F(x)$ 的两个零点,试判断 $\frac{x_1 + x_2}{2}$ 是否为函数 $F'(x)$ 的零点? 并说明理由.



2021 届高三 信息押题卷(一) 新高考卷

数学参考答案及评分意见

- 1.B 【解析】 $A = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x > 1\}$, $B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$, 所以 $A \cap B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$
- 2.D 【解析】由 $(a-b) \perp a$, 得 $(2-m, 0) \cdot (2, 2) = 0$, 即 $4-2m=0$, 解得 $m=2$.
- 3.A 【解析】 $P(\xi > 3) = 1 - 0.5[1 - P(4 - 2 \times 0.5 < \xi < 4 + 2 \times 0.5)] = 0.5 + 0.5 \times 0.954 = 0.977$.
- 4.A 【解析】以 O_2 为原点, O_1O_3 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系, 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 由题可得, $\frac{b}{a} = \frac{11}{13}$, 所以 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = e^2 - 1 = \frac{121}{169}$, $e = \frac{\sqrt{290}}{13}$.
- 5.A 【解析】以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 设正方体的棱长为 2, 则 $E(2, 1, 0), F(1, 0, 2), B_1(2, 2, 2), C(0, 2, 0), \vec{EF} = (-1, -1, 2), \vec{B_1C} = (-2, 0, -2), \cos \langle \vec{EF}, \vec{B_1C} \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{6}$, 所以异面直线 EF 和 B_1C 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.
- 6.C 【解析】由题, 李老师第一次、第二次输入错误, 第三次输入正确, 所以李老师第三次输入密码才能打开门的概率为 $P = \frac{23}{24} \cdot \frac{22}{23} \cdot \frac{1}{22} = \frac{1}{24}$.
- 7.C 【解析】设 $g(x) = xf(x), g(-x) = -xf(-x) = xf(x)$, 所以 $g(x)$ 为偶函数, 令任意的 $x_2 > x_1 > 0$, 则 $f(x_2) > f(x_1) > f(0) = 0$, 所以 $x_2 f(x_2) > x_1 f(x_1)$, 故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(-2) = g(2) > g(\frac{3}{2}) > g(\frac{1}{2})$, 故 $c > a > b$.
- 8.B 【解析】 A 和 B 不能去同一个社区, A 和 C 必须去同一个社区, 故有 2、2、1 和 3、1、1 两种分配方案, 所以不同的选派方法共有 $C_3^2 A_3^3 + C_2^1 A_3^3 = 30$ 种.
- 9.CD 【解析】当 $0 > a > b$ 时, $\frac{a}{b} < 1$, A 错误; 当 $c=0$ 时, $ac^2 = bc^2 = 0$, B 错误; $a-b > 0$, 所以 $2^{a-b} > 2^0 = 1$, C 正确; 由基本不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 因为 $a \neq b$, 所以 $a^2 + b^2 > 2ab$, D 正确.
- 10.ACD 【解析】若 l 垂直 x 轴, 则 $|AB| = 2p = 4, p = 2$, 则抛物线方程为 $y^2 = 4x$, A 正确; $|MF|$ 等于 M 到准线的距离, 最小值为 $\frac{p}{2}$, 所以 $p = 1$, B 错误; 设切线方程为 $x = my - \frac{p}{2}$, 代入 $y^2 = 2px$ 得 $y^2 - 2pmy + p^2 = 0, \Delta = 4p^2m^2 - 4p^2 = 0$, 得 $m = \pm 1$, 所以切线的斜率 $k = \frac{1}{m} = \mp 1$, 所以两条切线互相垂直, C 正确; 以 AB 为直径的圆的圆心为 AB 的中点, $|AB|$ 等于 A, B 两点到准线的距离之和, 所以圆心到准线的距离 $d = \frac{1}{2}|AB|$, 故以 AB 为直径的圆与抛物线的准线相切, D 正确.
- 11.ABC 【解析】由题, $f(0) = \frac{A}{2} = A \sin \varphi$, 即 $\sin \varphi = \frac{1}{2}$, 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, A 正确; $f(\frac{5}{2}) = 0$, 即 $\sin(\frac{5}{2}\omega + \frac{\pi}{6}) = 0$, 即 $\frac{5}{2}\omega + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}, \omega = \frac{4}{5}k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.



由图像知 $\frac{T}{4} < \frac{5}{2} < \frac{T}{2}$, 即 $5 < T < 10$, $5 < \frac{2\pi}{\omega} < 10$, 即 $\frac{\pi}{5} < \omega < \frac{2}{5}\pi$,

所以 $k=0$, $\omega=\frac{\pi}{3}$, $T=6$, B 正确;

因为 $A \sin[\frac{\pi}{3}(x-\frac{1}{2})+\frac{\pi}{6}] = A \sin \frac{\pi}{3}x = g(x)$, C 正确;

$f(\frac{3}{2}) = A \sin(\frac{\pi}{3} \times \frac{3}{2} + \frac{\pi}{6}) = A \sin \frac{2\pi}{3} \neq \pm A$, D 错误.

12. ABD 【解析】 $f(e) = 1 - ef'(e) = 1$, 解得 $f'(e) = 0$, A 正确;

由 $f(x) = \ln x - xf'(x)$ 得 $f(x) + xf'(x) = \ln x$, 即 $[xf(x)]' = \ln x$, 即 $F'(x) = \ln x$, 可得 $x \in (0, 1)$ 时, $F'(x) < 0$, $x \in (1, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0$, 所以 $F(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值, B 正确;

$F(x) = x \ln x - x^2 f'(x)$, $F'(x) = 1 + \ln x - [x^2 f'(x)]' = \ln x$, 即 $[x^2 f'(x)]' = 1 > 0$,

设 $g(x) = x^2 f'(x)$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 由 $f'(e) = 0$ 得 $g(e) = 0$, 所以当 $x \in (0, e)$ 时, $g(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$, 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递减, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增, 又 $f(e) = 1$, 所以 $f(x)$ 没有零点, C 错误, D 正确.

13. $\sqrt{2}$ 【解析】 $z = \frac{-i(1-i)}{i(1-i)} = -1-i$, $|z+2| = |1+i| = \sqrt{2}$.

14. $\pm\sqrt{2}$ 【解析】由题, $(1+ax)^6 = 1+2ax+a^2x^2$, $(x+\frac{2}{x})^6$ 的展开式的通项为

$T_{r+1} = C_6^r 2^r x^{6-2r}$, 所以 $C_6^0 2^0 + a^2 C_6^2 2^1 = 25$, 即 $1+12a^2=25$, 解得 $a = \pm\sqrt{2}$.

15. 6 【解析】设第 n 年绿化的面积为 a_n , 则 $a_n = (\frac{3}{2})^{n-1}$, 第 n 年“荒化”的面积为 b_n ,

则 $b_n = \begin{cases} 0, n=1, \\ \frac{1}{10}a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$, 所以 n 年绿化的总面积 $S_n = \frac{1 \times [1 - (\frac{3}{2})^n]}{1 - \frac{3}{2}} = 2 \times (\frac{3}{2})^n - 2$.

n 年荒化的总面积 $T_n = \frac{\frac{1}{10} \times [1 - (\frac{3}{2})^{n-1}]}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{1}{5} \times (\frac{3}{2})^{n-1} + \frac{1}{5}$.

所以 $S_n - T_n = 2 \times (\frac{3}{2})^n - 2 - \frac{1}{5}(\frac{3}{2})^{n-1} + \frac{1}{5} = 15$,

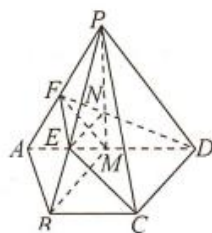
即 $(\frac{3}{2})^{n-1} = 6$, 两边取常用对数得 $(n-1)\lg \frac{3}{2} = \lg 6$, 即 $n = \frac{\lg 3 + \lg 2}{\lg 3 - \lg 2} + 1 \approx \frac{0.48 + 0.3}{0.48 - 0.3} + 1 \approx 5.33$.

所以约需要 6 年.

16. $\frac{1}{2}$ 【解析】取 AD 中点 M, 连接 BM, PM, FM, 设 PM 与 DF 的交点为 N,

由题可知, $BM \parallel CD$, 且 $BM = CD$, 所以 $BM \parallel$ 平面 CDFE,

故 $BM \parallel EN$,



又 F 为 PA 中点, 所以 $FM \parallel PD$, 且 $FM = \frac{1}{2}PD$, 故 $\frac{MN}{NP} = \frac{FM}{PD} = \frac{1}{2}$,

所以 $\frac{MN}{NP} = \frac{BE}{EP} = \frac{1}{2}$, 所以 $n = \frac{1}{2}$.

17.【解析】方案一: 选择条件①.

(1) 由 $S_6 - S_3 = 27$, 得 $a_4 + a_5 + a_6 = 3a_5 = 27$, 所以 $a_5 = 9$, 2 分

又 $a_1 = 1, a_5 = a_1 + 4d = 9$, 解得 $d = 2$,

$a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-1$ 4 分

(2) $b_n = 2^{n-1}a_n = (2n-1) \times 2^{n-1}$, 5 分

$T_n = 1 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 5 \times 2^2 + \dots + (2n-1) \times 2^{n-1}$,

$2T_n = 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \dots + (2n-3) \times 2^{n-1} + (2n-1) \times 2^n$, 6 分

作差得: $-T_n = 1 + 2 \times (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) - (2n-1) \times 2^n$ 8 分

$$= 1 + 2 \times \frac{2 \times (1-2^{n-1})}{1-2} - (2n-1) \times 2^n = -3 - (2n-3) \times 2^n$$

所以 $T_n = (2n-3) \times 2^n + 3$ 10 分

方案二: 选择条件②.

(1) 由题 $S_n - a_n = (n-1)^2$ 得: $S_2 - a_2 = 1, a_1 = 1$,

$S_3 - a_3 = a_1 + a_2 = 4$, 得 $a_2 = 3$, 2 分

所以 $d = a_2 - a_1 = 2$,

$a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-1$ 4 分

(2) $b_n = 2^{n-1}a_n = (2n-1) \times 2^{n-1}$, 5 分

$T_n = 1 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 5 \times 2^2 + \dots + (2n-1) \times 2^{n-1}$,

$2T_n = 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \dots + (2n-3) \times 2^{n-1} + (2n-1) \times 2^n$, 6 分

作差得: $-T_n = 1 + 2 \times (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) - (2n-1) \times 2^n$ 8 分

$$= 1 + 2 \times \frac{2 \times (1-2^{n-1})}{1-2} - (2n-1) \times 2^n = -3 - (2n-3) \times 2^n$$

所以 $T_n = (2n-3) \times 2^n + 3$ 10 分

方案三: 选择条件③.

(1) 由 $(a_6 + a_8) - (a_3 + a_5) = 6d = 12$, 得 $d = 2$ 2 分

又 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = 9$, 得 $a_2 = 3$

所以 $a_1 = a_2 - d = 1$,

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-1$ 4 分

(2) $b_n = 2^{n-1}a_n = (2n-1) \times 2^{n-1}$, 5 分

$T_n = 1 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 5 \times 2^2 + \dots + (2n-1) \times 2^{n-1}$,

$2T_n = 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \dots + (2n-3) \times 2^{n-1} + (2n-1) \times 2^n$, 6 分

作差得: $-T_n = 1 + 2 \times (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) - (2n-1) \times 2^n$ 10 分

$$= 1 + 2 \times \frac{2 \times (1-2^{n-1})}{1-2} - (2n-1) \times 2^n = -3 - (2n-3) \times 2^n$$

所以 $T_n = (2n-3) \times 2^n + 3$, 10 分

信息押题卷(一) 新高考卷 数学答案 第3页(共6页)



又 F 为 PA 中点, 所以 $FM \parallel PD$, 且 $FM = \frac{1}{2}PD$, 故 $\frac{MN}{NP} = \frac{FM}{PD} = \frac{1}{2}$,

所以 $\frac{MN}{NP} = \frac{BE}{EP} = \frac{1}{2}$, 所以 $n = \frac{1}{2}$.

17.【解析】方案一: 选择条件①.

(1) 由 $S_6 - S_3 = 27$, 得 $a_4 + a_5 + a_6 = 3a_5 = 27$, 所以 $a_5 = 9$, 2 分

又 $a_1 = 1, a_5 = a_1 + 4d = 9$, 解得 $d = 2$,

$a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-1$ 4 分

(2) $b_n = 2^{n-1}a_n = (2n-1) \times 2^{n-1}$, 5 分

$T_n = 1 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 5 \times 2^2 + \dots + (2n-1) \times 2^{n-1}$,

$2T_n = 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \dots + (2n-3) \times 2^{n-1} + (2n-1) \times 2^n$, 6 分

作差得: $-T_n = 1 + 2 \times (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) - (2n-1) \times 2^n$ 8 分

$$= 1 + 2 \times \frac{2 \times (1-2^{n-1})}{1-2} - (2n-1) \times 2^n = -3 - (2n-3) \times 2^n$$

所以 $T_n = (2n-3) \times 2^n + 3$ 10 分

方案二: 选择条件②.

(1) 由题 $S_n - a_n = (n-1)^2$ 得: $S_2 - a_2 = 1, a_1 = 1$,

$S_3 - a_3 = a_1 + a_2 = 4$, 得 $a_2 = 3$, 2 分

所以 $d = a_2 - a_1 = 2$,

$a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-1$ 4 分

(2) $b_n = 2^{n-1}a_n = (2n-1) \times 2^{n-1}$, 5 分

$T_n = 1 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 5 \times 2^2 + \dots + (2n-1) \times 2^{n-1}$,

$2T_n = 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \dots + (2n-3) \times 2^{n-1} + (2n-1) \times 2^n$, 6 分

作差得: $-T_n = 1 + 2 \times (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) - (2n-1) \times 2^n$ 8 分

$$= 1 + 2 \times \frac{2 \times (1-2^{n-1})}{1-2} - (2n-1) \times 2^n = -3 - (2n-3) \times 2^n$$

所以 $T_n = (2n-3) \times 2^n + 3$ 10 分

方案三: 选择条件③.

(1) 由 $(a_6 + a_8) - (a_3 + a_5) = 6d = 12$, 得 $d = 2$ 2 分

又 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = 9$, 得 $a_2 = 3$

所以 $a_1 = a_2 - d = 1$,

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-1$ 4 分

(2) $b_n = 2^{n-1}a_n = (2n-1) \times 2^{n-1}$, 5 分

$T_n = 1 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 5 \times 2^2 + \dots + (2n-1) \times 2^{n-1}$,

$2T_n = 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \dots + (2n-3) \times 2^{n-1} + (2n-1) \times 2^n$, 6 分

作差得: $-T_n = 1 + 2 \times (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) - (2n-1) \times 2^n$ 10 分

$$= 1 + 2 \times \frac{2 \times (1-2^{n-1})}{1-2} - (2n-1) \times 2^n = -3 - (2n-3) \times 2^n$$

所以 $T_n = (2n-3) \times 2^n + 3$ 10 分

(2)存在,

由(1)可知 $CD \perp A_1B$, $CD \perp AB_1$, $A_1B \perp AB_1$, 以 D 为原点, 分别以 DA, DA_1, DC 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系(如图), 则: 6分

$D(0,0,0), C(0,0,\sqrt{3}), A(\sqrt{3},0,0), A_1(0,1,0), B_1(-\sqrt{3},0,0)$,
则 $E(\sqrt{3}-t,0,t), 0 < t < \sqrt{3}$ 7分

易知 $m=(0,0,1)$ 即为平面 A_1B_1B 的一个法向量,

设平面 A_1B_1E 的一个法向量为 $n=(x,y,z)$, 则

$$\begin{cases} -\sqrt{3}x-y=0, \\ (\sqrt{3}-t)x-y+tz=0 \end{cases}, \text{不妨令 } x=-1, \text{解得 } y=\sqrt{3}, z=\frac{2\sqrt{3}}{t}-1,$$

所以 $n=(-1,\sqrt{3},\frac{2\sqrt{3}}{t}-1)$ 9分

$$|\cos\langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m||n|} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{即 } \frac{|\frac{2\sqrt{3}}{t}-1|}{\sqrt{4+(\frac{2\sqrt{3}}{t}-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{设 } a=\frac{2\sqrt{3}}{t}-1(a>1),$$

$$\frac{|a|}{\sqrt{4+a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{解得 } a=2, \text{或 } a=-2(\text{舍}) \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } t=\frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{所以 } AE=\sqrt{2}t=\frac{2\sqrt{6}}{3} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21.【解析】(1)设椭圆的半焦距为 c , 则圆 $x^2+y^2=a^2-b^2$ 上的点到直线 l 的最大距离为:

$$4+\sqrt{a^2-b^2}=4+c=4+\sqrt{3}, \text{解得 } c=\sqrt{3}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{由椭圆的离心率 } e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{得 } a=2, b=\sqrt{a^2-c^2}=1,$$

$$\text{所以椭圆 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4}+y^2=1. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2)证明:设直线 $l_1: x=my+1$, 代入椭圆方程得: $(4+m^2)y^2+2my-3=0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(4, y_1)$,

$$\text{则 } y_1+y_2=\frac{-2m}{4+m^2}, y_1y_2=\frac{-3}{4+m^2}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{直线 } BC \text{ 的方程为 } y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-4}(x-4), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

由对称性可知,若存在定点,则必在 x 轴上,

$$\text{令 } y=0 \text{ 得 } x=\frac{4y_2-x_2y_1}{y_2-y_1}=\frac{4y_2-(my_2+1)y_1}{y_2-y_1}=\frac{4y_2-y_1-my_1y_2}{y_2-y_1}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}y_2+\frac{3}{2}y_1+\frac{5}{2}y_2-\frac{5}{2}y_1-my_1y_2}{y_2-y_1}=\frac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-my_1y_2}{y_2-y_1}+\frac{5}{2}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \frac{3}{2}(y_1+y_2)-my_1y_2=\frac{-3m}{4+m^2}+\frac{3m}{4+m^2}=0,$$

$$\text{所以,直线 } BC \text{ 与 } x \text{ 轴的交点为定点 } (\frac{5}{2}, 0). \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22.【解析】(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 2x - \frac{2}{x}$,

令 $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 0$, 得 $x = 1$ 或 $x = -1$ (舍), 2 分

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, 1)$; 4 分

(2) $\frac{x_1 + x_2}{2}$ 不是函数 $F'(x)$ 的零点, 理由如下:

$$F(x) = f(x) - x = x^2 - x - 2\ln x,$$

因为 x_1, x_2 为函数 $F(x)$ 的两个零点, 不妨设 $0 < x_1 < x_2$, 则:

$$\begin{cases} x_1^2 - 2\ln x_1 - x_1 = 0 \\ x_2^2 - 2\ln x_2 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 - x_1 = 2\ln x_1 \\ x_2^2 - x_2 = 2\ln x_2 \end{cases}, \text{两式作差得:}$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 1) = 2(\ln x_1 - \ln x_2),$$

$$x_1 + x_2 - 1 = \frac{2(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_1 - x_2}, \text{ 6 分}$$

$$\text{又 } F'(x) = 2x - 1 - \frac{2}{x}, \text{ 则 } F'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = x_1 + x_2 - \frac{4}{x_1 + x_2} - 1 = \frac{2(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_1 - x_2} - \frac{4}{x_1 + x_2}$$

$$= \frac{2}{x_1 - x_2} \left[(\ln x_1 - \ln x_2) - \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} \right] = \frac{2}{x_1 - x_2} \left[\ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{2(\frac{x_1}{x_2} - 1)}{\frac{x_1}{x_2} + 1} \right],$$

$$\text{令 } t = \frac{x_1}{x_2} (0 < t < 1), \text{ 设 } h(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}, \text{ 8 分}$$

$$\text{则 } h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}, \text{ 因为 } 0 < t < 1, \text{ 所以 } h'(t) > 0,$$

所以 $h(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 故有:

$$h(t) < h(1) = 0, \text{ 即当 } 0 < t < 1 \text{ 时, } \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} < 0, \text{ 即 } \ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{2(\frac{x_1}{x_2} - 1)}{\frac{x_1}{x_2} + 1} < 0, \text{ 10 分}$$

$$\text{又 } 0 < x_1 < x_2, \text{ 所以 } \frac{4}{x_1 - x_2} \left[\ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{2(\frac{x_1}{x_2} - 1)}{\frac{x_1}{x_2} + 1} \right] > 0, \text{ 即 } F'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0,$$

所以 $\frac{x_1 + x_2}{2}$ 不是函数 $F'(x)$ 的零点. 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。

总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》