2023年云南省第二次高中毕业生复习统一检测

数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. A　2. B　3. C　4. C　5. B　6. D　7. A　8. A

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. B、C、D　10. A、D　11. A、C、D　12. B、C

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. -2　14. 240　15. $\frac{5}{3}$　16. $[0,+\infty)\cup\{-1\}$

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10分）

解：（1）零假设为H_0：观众喜欢该影片与观众的性别无关联. 由已知得

$$\chi^2=\frac{200\times(15\times70-85\times30)^2}{100\times100\times45\times155}=\frac{200}{31}=6\frac{14}{31}>3.841=x_{0.05}$$ ……………………4分

根据小概率值$\alpha=0.05$的独立性检验，我们推断H_0不成立，即认为观众喜欢该影片与观众的性别有关，此推断犯错误的概率不大于0.05.……………6分

（2）记事件A：第一次抽到的是喜欢该影片的观众，

事件B：第二次抽到的是不喜欢该影片的观众.

根据已知得$P(A)=\frac{45}{200}=\frac{9}{40}$，$P(AB)=\frac{A_{45}^1A_{155}^1}{A_{200}^2}=\frac{45\times155}{200\times199}=\frac{9\times31}{8\times199}$.……8分

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{9\times 31}{8\times 199}}{\frac{9}{40}}=\frac{9\times 31}{8\times 199}\times\frac{40}{9}=\frac{155}{199}.$$

答：在第一次抽到的是喜欢该影片的观众的条件下，第二次抽到的是不喜欢该影片的观众的概率为$\frac{155}{199}$. ……………………………………………………10 分

18.（12 分）

（1）证明：$\because A=\frac{\pi}{3}$，$b=2$，$c=3$，

$\therefore a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4+9-2\times 2\times 3\times\frac{1}{2}=7$.

$\therefore a=\sqrt{7}$. ……………………………………………………3 分

$\because \frac{a}{\tan A}+\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\tan A}+\frac{a}{\sin A}$

$=\frac{\sqrt{7}}{\tan\frac{\pi}{3}}+\frac{\sqrt{7}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\sqrt{21}$，

$\therefore \frac{a}{\tan A}+\frac{b}{\sin B}=\sqrt{21}$. ……………………………………………………6 分

（2）解：由$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=6\sqrt{3}$得$bc=24$.

$\because D$为边BC的中点，

$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. ……………………………………………………8 分

$\therefore |\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{c^2+bc+b^2}$ ……………………………10 分

$=\frac{1}{2}\sqrt{c^2+b^2+bc}\geq\frac{1}{2}\sqrt{2bc+bc}=\frac{1}{2}\sqrt{3bc}=\frac{1}{2}\sqrt{3\times 24}=3\sqrt{2}$.

$\because$当$b=c=2\sqrt{6}$时，$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{c^2+bc+b^2}=\frac{1}{2}\sqrt{24+24+24}=3\sqrt{2}$，

$\therefore AD$长的最小值为$3\sqrt{2}$. ……………………………………………………12 分

19.（12 分）

解：（1）$\because a_{n+1}^2-2a_n^2=a_na_{n+1}+3\times2^n(a_n+a_{n+1})$，

$\therefore (a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-2a_n-3\times2^n)=0$.

$\because$ 数列$\{a_n\}$的每一项都是正数，

$\therefore a_{n+1}+a_n>0$.

$\therefore a_{n+1}-2a_n-3\times2^n=0$.

$\therefore a_{n+1}=2a_n+3\times2^n$. ……………………………………………………………2 分

$\therefore \frac{a_{n+1}}{2^{n-1}}=\frac{a_n}{2^{n-2}}+6$，即 $\frac{a_{n+1}}{2^{n-1}}-\frac{a_n}{2^{n-2}}=6$.

$\therefore$ 数列$\left\{\frac{a_n}{2^{n-2}}\right\}$是以$\frac{a_1}{2^{-1}}=6$为首项，6 为公差的等差数列.

$\therefore$ 数列$\left\{\frac{a_n}{2^{n-2}}\right\}$的前 n 项和为 $6n+\frac{n(n-1)\times6}{2}=3n^2+3n$，………………4 分

$\left\{\frac{a_n}{2^{n-2}}+b_n\right\}$的前 n 项和 $S_n=3n^2+3n-3n^2+180=3n+180$，…………6 分

且 $\frac{a_n}{2^{n-2}}=6+(n-1)\times6=6n$.

$\therefore \frac{a_n}{n}=6\times2^{n-2}=3\times2^{n-1}$.

$\therefore$ 数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$是首项为3，公比为2的等比数列.

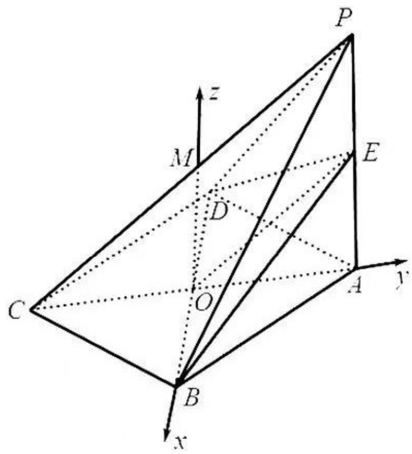
$\therefore$ 数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$的前 n 项和 $T_n=\frac{3\times(1-2^n)}{1-2}=3\times2^n-3$. ……………………8 分

（2）当$1\le n\le6$时，$S_n>T_n$，……………………………………………………10 分

当$n\ge7$时，$S_n<T_n$.……………………………………………………………12 分

20.（12 分）

（1）证明：设 $AC\cap BD=O$，连接 OE．……………………………………………………1 分



∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ O 是 AC 的中点．

∵点 E 为线段 AP 的中点，

∴ OE 是 ΔPAC 的中位线．

∴ $OE // CP$．……………………………3 分

又∵ $CP \not\subset$ 平面 BDE，$OE\subset$ 平面 BDE，

∴ $CP //$ 平面 BDE．……………………4 分

（2）解：设 PC 的中点为 M，连接 OM．

∴ OM 是 ΔPAC 的中位线．

∴ $OM // AP$．

∵ $AP\perp$ 平面 $ABCD$，

∴ $OM\perp$ 平面 $ABCD$．

∵ $OA\subset$ 平面 $ABCD$，$OB\subset$ 平面 $ABCD$，

∴ $AP\perp OA$，$OM\perp OA$，$OM\perp OB$，$AP=\sqrt{CP^2-AC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$．

又∵四边形 $ABCD$ 为菱形，

∴ $OB\perp OA$．　∴ OA、OB、OM 两两互相垂直．

分别以射线 OB、OA、OM 为 x 轴、y 轴、z 轴的非负半轴建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，则 $B(4,0,0)$，$D(-4,0,0)$，$E(0,3,4)$，$P(0,3,8)$，$C(0,-3,0)$，

$\overrightarrow{DB}=(8,0,0)$，$\overrightarrow{DE}=(4,3,4)$，$\overrightarrow{CP}=(0,6,8)$，$\overrightarrow{CD}=(-4,3,0)$．…………………6 分

设$\vec{n}=(x,y,z)$为平面BDE的一个法向量，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}$得$\begin{cases}8x+0\times y+0\times z=0,\\ 4x+3y+4z=0,\end{cases}$取$z=3$，得$y=-4$.

$\therefore \vec{n}=(0,-4,3)$是平面$BDE$的一个法向量.……………………………………8分

设$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$是平面PCD的一个法向量，

由$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$得$\begin{cases}6y_1+8z_1=0,\\ -4x_1+3y_1=0,\end{cases}$取$y_1=4$，得$x_1=3$，$z_1=-3$.

$\therefore \vec{m}=(3,4,-3)$是平面$PCD$的一个法向量.………………………………10分

设平面BDE与平面PCD所成二面角的大小为θ，则$0<\theta<\pi$，且

$$|\cos\theta|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{|-16-9|}{5\sqrt{34}}=\frac{5\sqrt{34}}{34}.$$

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{25\times34}{34^2}}=\frac{3\sqrt{34}}{34}.$$

$\therefore$平面BDE与平面PCD所成二面角的正弦值为$\frac{3\sqrt{34}}{34}$.……………………12分

21.（12分）

解：（1）根据已知，设椭圆E的方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，……………………………1分

则$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \frac{3}{a^2}+\frac{1}{2b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解方程组得$\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{2},\\ c=\sqrt{2}.\end{cases}$

$\therefore$椭圆E的方程为$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{2}=1$.…………………………………………………4分

（2）证明：$\because$ F 是椭圆 E 的上焦点，O 是坐标原点，

$\therefore$ F 的坐标为 $(0,\sqrt{2})$，$|OF|=c=\sqrt{2}$.

$\because$ P 在第一象限，且 ΔPOF 的面积等于 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$ $\dfrac{1}{2}\times|OF|\times x_P=\dfrac{\sqrt{2}x_P}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $x_P=1$.

$\because$ P 在第一象限，椭圆 E 经过点 P，

$\therefore$ $y_P>0$，且 $\dfrac{y_P^2}{4}+\dfrac{x_P^2}{2}=\dfrac{y_P^2}{4}+\dfrac{1}{2}=1$，解得 $y_P=\sqrt{2}$.

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(1,\sqrt{2})$.……………………………………………………6 分

$\therefore$ $k_{FP}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{1-0}=0$，即直线 FP 的斜率等于 0.

由 P 在第一象限得直线 FP // x 轴.

$\because$ A、B 是椭圆 E 上异于 P 的不同的动点，且 $\angle APF=\angle BPF$，

$\therefore$ 直线 AP、直线 BP 的倾斜角互补，且都有斜率.

$\therefore$ 直线 AP、直线 BP 的斜率互为相反数，设直线 AP 的斜率为 k，则直线 BP 的斜率为 $-k$.

$\therefore$ 直线 AP 的方程为 $y-\sqrt{2}=k(x-1)$，即 $y=kx+(\sqrt{2}-k)$.

由 $\begin{cases} y=kx+(\sqrt{2}-k), \\ \dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{2}=1 \end{cases}$ 得 $(k^2+2)x^2+2k(\sqrt{2}-k)x+(\sqrt{2}-k)^2-4=0$.

$\therefore$ $x_Ax_P=x_A=\dfrac{(\sqrt{2}-k)^2-4}{k^2+2}=\dfrac{k^2-2\sqrt{2}k-2}{k^2+2}$，

$y_A=k\times\dfrac{k^2-2\sqrt{2}k-2}{k^2+2}+(\sqrt{2}-k)=\dfrac{-2\sqrt{2}k^2-4k}{k^2+2}+\sqrt{2}$.

$\therefore A$ 的坐标为$(\dfrac{k^2-2\sqrt{2}k-2}{k^2+2},\dfrac{-2\sqrt{2}k^2-4k}{k^2+2}+\sqrt{2})$.

同理可得 B 的坐标为$(\dfrac{k^2+2\sqrt{2}k-2}{k^2+2},\dfrac{-2\sqrt{2}k^2+4k}{k^2+2}+\sqrt{2})$.……………10 分

$\therefore$直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{\dfrac{-2\sqrt{2}k^2+4k}{k^2+2}+\sqrt{2}-\dfrac{-2\sqrt{2}k^2-4k}{k^2+2}-\sqrt{2}}{\dfrac{k^2+2\sqrt{2}k-2}{k^2+2}-\dfrac{k^2-2\sqrt{2}k-2}{k^2+2}}=\sqrt{2}$.

$\therefore$直线 AB 的斜率是定值，这个定值为$\sqrt{2}$. ……………………………………12 分

22.（12 分）

解：（1）$\because m=2$，$F(x)=e^x+\dfrac{x^2}{2}-4x+2-f(x)=\dfrac{x^2}{2}-4x+2\ln(2x-2)$，

$\therefore F(x)$的定义域为$(1,+\infty)$，

$F'(x)=x-4+\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{x^2-5x+6}{x-1}=\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-1}$.…………………………2 分

x	$(1,2)$	2	$(2,3)$	3	$(3,+\infty)$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	单调递增	$2\ln2-6$	单调递减	$4\ln2-\dfrac{15}{2}$	单调递增

$\therefore F(x)$的极大值为$F(2)=2\ln2-6$；$F(x)$的极小值为$F(3)=4\ln2-\dfrac{15}{2}$.…4 分

（2）$\because m>0$，由$mx-m>0$得$x>1$，$\therefore f(x)$的定义域为$(1,+\infty)$.……………5 分

当$m>0$，$x>1$时，

$f(x)=e^x+m-m\ln(mx-m)\geq0$

$\Leftrightarrow e^x+m\geq m\ln(mx-m)=m\ln m+m\ln(x-1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{m}e^x+1\geq\ln m+\ln(x-1)\Leftrightarrow\dfrac{1}{m}e^x-\ln m\geq\ln(x-1)-1$

$\Leftrightarrow e^{x-\ln m}-\ln m \geq \ln(x-1)-1$

$\Leftrightarrow e^{x-\ln m}+(x-\ln m) \geq \ln(x-1)+(x-1)=e^{\ln(x-1)}+\ln(x-1)$.………………7 分

设 $h(x)=e^{x}+x$，则 $e^{x-\ln m}+(x-\ln m) \geq e^{\ln(x-1)}+\ln(x-1)$

$\Leftrightarrow h(x-\ln m) \geq h[\ln(x-1)]$.

$\because h'(x)=e^{x}+1>0$，

$\therefore h(x)$ 为单调递增函数.

$\therefore h(x-\ln m) \geq h[\ln(x-1)] \Leftrightarrow x-\ln m \geq \ln(x-1) \Leftrightarrow \ln m \leq x-\ln(x-1)$.……9 分

设 $H(x)=x-\ln(x-1)$，则 $H'(x)=1-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-2}{x-1}$.

$\therefore$ 当 $x \in(1,2)$ 时，$H'(x)=\dfrac{x-2}{x-1}<0$，即 $H(x)$ 单调递减；

当 $x \in(2,+\infty)$ 时，$H'(x)=\dfrac{x-2}{x-1}>0$，即 $H(x)$ 单调递增.

$\therefore$ 当 $x \in(1,+\infty)$ 时，$H(x)_{\min}=H(2)=2$.………………………………11 分

$\therefore \ln m \leq H(x)_{\min}=2$，即 $m \leq e^{2}$.

$\therefore$ 存在实数 m，且 m 的取值范围为 $(0, e^{2}]$，$\forall x>1$，$f(x) \geq 0$.………12 分

请注意：以上参考答案与评分标准仅供阅卷时参考，其他答案请参考评分标准酌情给分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。