江西省重点中学盟校 2023 届高三第一次联考

数学（理）试题

命题：景德镇一中 操军华 李璐　　新余四中 丁娟　　鹰潭一中 黄鹤飞

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1. 若集合 $A=\{x\mid x<4\}$，$B=\{x\mid \frac{1}{x}\geq 1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$(-\infty,1]$　　B．$(0,1]$　　C．$(-\infty,0)\cup(1,4)$　　D．$(-\infty,0)\cup(0,1]$

2. 若复数 z 是方程 $x^2-2x+2=0$ 的一个根，则 $i\cdot z$ 的虚部为（　　）

A．2　　B．$2i$　　C．i　　D．1

3. 袋中装有四个大小完全相同的小球，分别写有“中、华、道、都”四个字，每次有放回地从中任取一个小球，直到写有“道”、“都”两个字的小球都被取到，则停止取球．现用随机模拟的方法估计取球停止时的概率，具体方法是：利用计算机产生 0 到 3 之间取整数值的随机数，用 0,1,2,3 分别代表“中、华、道、都”四个字，以每三个随机数为一组，表示取球三次的结果．现经随机模拟产生了以下 18 组随机数：

232　321　230　023　231　021　122　203　012

231　130　133　231　031　123　122　103　233

由此可以估计，恰好取球三次就停止的概率为（　　）

A．$\frac{5}{18}$　　B．$\frac{2}{9}$　　C．$\frac{1}{6}$　　D．$\frac{1}{9}$

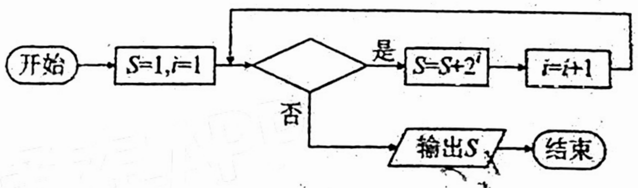
4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，若 $a_2+a_3+a_{14}+a_{15}=40$，则 $S_{16}=$（　　）

A．150　　B．160　　C．170　　D．与 a_1 和公差有关

5. 法国数学家加斯帕·蒙日被称为“画法几何创始人”、“微分几何之父”.他发现与椭圆相切的两条互相垂直的切线的交点的轨迹是以该椭圆中心为圆心的圆，这个圆称为该椭圆的蒙日圆.若椭圆 Γ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的蒙日圆为 C：$x^2+y^2=3b^2$，则椭圆 Γ 的离心率为（　　）

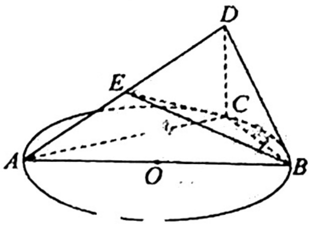
A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. 执行如图所示的程序框图，为使输出的数据为 31，则判断框中应填入的条件为（　　）



A．$i\leq 4$　　B．$i\leq 5$　　C．$i\leq 6$　　D．$i\leq 7$

7. 如图，$\triangle ABC$ 内接于圆 O，AB 为圆 O 的直径，$AB=5$，$BC=3$，$CD\perp$ 平面 ABC，E 为 AD 的中点，且异面直线 BE 与 AC 所成角为 $60°$，则点 A 到平面 BCE 的距离为（　　）



A. $\dfrac{8\sqrt{21}}{3}$　　B. $\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$

C. $\dfrac{4\sqrt{21}}{7}$　　D. $\dfrac{4\sqrt{7}}{3}$

8. 若正项递增等比数列 $\{a_n\}$ 满足：$\dfrac{1}{2}+a_2-a_3+\lambda(a_3-a_4)=0,\lambda\in R$，则 $a_4+\lambda a_5$ 的最小值为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

9. 已知点 P 在棱长为 2 的正方体表面上运动，AB 是该正方体外接球的一条直径，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为（　　）

A. -2　　B. -3　　C. -1　　D. 0

10. 长白飞瀑，高句丽遗迹，鹤舞向海，一眼望三国，伪满皇宫，松江雾凇，净月风光，查干冬渔，是著名的吉林八景，某人打算到吉林旅游，冬季来的概率是 $\dfrac{1}{2}$，夏季来的概率是 $\dfrac{1}{2}$，如果冬季来，则看不到长白飞瀑，鹤舞向海和净月风光，若夏季来，则看不到松江雾凇和查干冬捕，无论什么时候来，由于时间原因，只能在可去景点当中选择 3 处参观，则某人去了“一眼望三国”景点的概率为（　　）

A. $\dfrac{9}{20}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{11}{20}$　　D. $\dfrac{3}{5}$

11. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，A 为双曲线右支上一点，设 $\angle AF_1F_2=\alpha$，$\angle AF_2F_1=\beta$，若 $\tan\dfrac{\beta}{2}=2\tan\dfrac{\alpha}{2}$，则双曲线的渐近线方程为（　　）

A. $y=\pm\sqrt{2}x$　　B. $y=\pm2\sqrt{2}x$　　C. $y=\pm3x$　　D. $y=\pm4x$

12. 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的导函数分别为 $f'(x)$ 和 $g'(x)$，满足 $f'(x)-g'(x-2)=0$，$f(-x)-g(x)=-2$，且 $g(x-2)$ 为奇函数，则 $\sum\limits_{k=1}^{2023}f(k)=$（　　）

A. -4046　　B. -4045　　C. -4044　　D. -4043

二、填空题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．)

13. 设向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\pi}{3},|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=1$，则 $|\vec{a}+3\vec{b}|=$______.

14. 设 $f(x)=\cos(x+\dfrac{\pi}{6})$，若 $f(x_1)=f(x_2)$ 且 $x_1x_2<0$，则 $|x_1-x_2|$ 取值范围为________.

15. 已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}$，所有满足 $f(m)+f(n-1)=0$ 的点 (m,n) 中，有且只有一个在圆 C 上，则圆 C 的方程可以是__________.（写出一个满足条件的圆的方程即可）

16. 若 $a\in\left(\dfrac{n+2}{n+1},\dfrac{n+1}{n}\right)(n\in N^*)$ 时，关于 x 的不等式 $x^a-\log_a^x>0$ 恒成立，则正整数 n 的取值集合为__________.（参考数据：$e\approx2.718,\ln2\approx0.693,\ln3\approx1.099$）

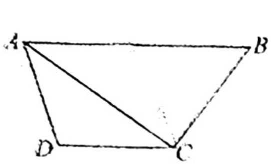
三、解答题(共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答、第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．)

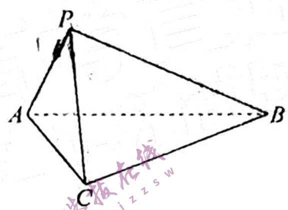
17. 在ΔABC中，已知$\sqrt{3}\left(\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C\right)=2\sin A\sin B\sin C$．

(1)求$\angle C$；

(2)若D是AB边上的一点，且$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DA}$,$\left|\overrightarrow{CD}\right|=2$，求$\Delta ABC$面积的最大值．

18. 如图，在梯形$ABCD$中，$AB//DC$，$AD=DC=\dfrac{1}{2}AB$，现将ΔADC沿AC翻折成直二面角$P-AC-B$．





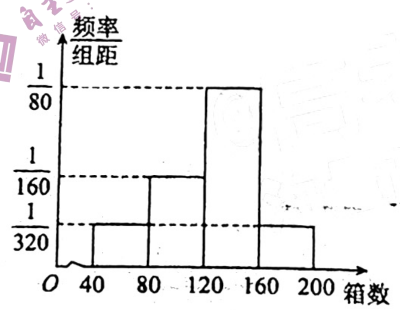
(I) 证明：$CB\perp PA$；

(II) 若$AB=4$,二面角$B-PA-C$余弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，求异面直线PC与AB所成角的余弦值.

19. 中医药在抗击新冠肺炎疫情中，发挥了重要作用。中药可以起到改善平常上呼吸道的症状，同时可以起到抑制病毒繁殖的效果就可以达到治疗新型冠状病毒肺炎的作用。某地种植药材收到了很好的经济效益．根据资料显示，产出的药材的箱数x（单位：十箱）与成本y（单位：千元）的关系如下：

x	3	4	6	7	9
y	6.5	7	7.5	8	8.2

y与x可用回归方程$\hat{y}=\hat{b}\lg x+\hat{a}$（其中$\hat{a},\hat{b}$为常数，且精确到 0.01）进行模拟．



(1)若农户卖出的该药材的价格为 500 元/箱，试预测该药材 10 箱的利润是多少元；(利润=售价-成本)

(2)据统计，4 月份的连续 20 天中农户每天为甲地可配送的药材的箱数的频率分布直方图如图，用这 20 天的情况来估计相应的概率.

(i)通过频率分布直方图计算农户每天平均可配送的药材的箱数（同一组中的数据以这组数据所在区间中点的值作代表)；

(ii)一个运输户拟购置 3 辆小货车专门运输农户为甲地配送的该药材，一辆货车每天只能运营一趟，每辆车每趟最多只能装载 40 箱该药材，满载发车，否则不发车．若发车，则每辆车每趟可获利

400元；若未发车，则每辆车每天平均亏损200元．试计算此项业务每天的利润平均值的大小．

参考数据：设 $t=\lg x$，则

$\bar{t}$	$\bar{y}$	$\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})$	$\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})^2$
0.73	7.44	0.53	0.15

参考公式：对于一组数据 (u_i,v_i) $(i=1,2,3,\cdots,n)$，其回归直线 $\hat{v}=\hat{\beta}u+\hat{\alpha}$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}u_iv_i-n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^{n}u_i^2-n\bar{u}^2}$，$\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$

20. 设抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，过焦点的直线与抛物线 C 交于 A,B 两点，抛物线在 A,B 两点切线交于点 P，当直线 AB 垂直 y 轴时，ΔPAB 面积为4．

（1）求抛物线的方程；

（2）若 $\angle PAB=3\angle PBA$，求直线 AB 的方程．

21. 已知函数 $f(x)=(x-a)^2\ln x$，$a>0$．

（1）讨论函数 $y=f(x)$ 极值点的个数；

（2）存在直线 $y=b$ 与 $y=b+\dfrac{e}{2}$ 与曲线 $y=f(x)$ 共有五个不同的交点，求 a 的取值范围．

（注：$e=2.71828\ldots$ 是自然对数的底数）

（二）选考题：共10分．请考生在第22、23题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

22. [选修4-4：坐标系与参数方程]（10分）

在直角坐标系 xOy 中，笛卡尔叶形线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 C_2 的普通方程为 $x+y=a(a>0)$，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系．

（1）写出 C_1 的普通方程与 C_2 的极坐标方程；

（2）若 C_1 与 C_2 有公共点，求 a 的取值范围．

23. [选修4-5：不等式选讲]（10分）

已知 a,b,c 都是正数，且 $abc=1$，证明：

（1）$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq 2\sqrt{c}$；

（2）$\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq\sqrt{a}+\sqrt{2b}+\sqrt{2c}$．