成都石室中学高 2023 届高考适应性考试(二)
理科数学参考答案

双向细目表

题型	题号	具体内容	分值	难度预估
选择题	1	集合的子集	5	0.95
选择题	2	命题真假判断	5	0.9
选择题	3	统计图表	5	0.95
选择题	4	幂函数	5	0.92
选择题	5	三角函数图象的性质	5	0.9
选择题	6	平行、垂直关系判断	5	0.9
选择题	7	指对数运算	5	0.9
选择题	8	双曲线离心率	5	0.8
选择题	9	等差数列单调性、最值	5	0.8
选择题	10	概率、排列组合	5	0.7
选择题	11	立体几何轨迹问题	5	0.5
选择题	12	函数有解问题	5	0.4
填空题	13	线性规划	5	0.95
填空题	14	等比数列基本量运算	5	0.85
填空题	15	函数零点问题	5	0.6
填空题	16	抛物线的切线问题	5	0.4
解答题	17	线性回归方程	12	0.8
解答题	18	垂直关系证明、二面角	12	0.8
解答题	19	解三角形、最值	12	0.8
解答题	20	直线与椭圆的位置关系	12	0.45
解答题	21	函数恒成立问题、数列不等式	12	0.45
解答题	22	坐标系与参数方程(选考)	10	0.8
解答题	23	不等式选讲(选考)	10	0.8
			150	0.75

答案及解析

1. C 【解析】因为 $A=\{x\in\mathbf{N}^*\mid y=\lg(5-x)\}=\{x\in\mathbf{N}^*\mid 5-x>0\}=\{1,2,3,4\}$,所以集合 A 的真子集的个数为 $2^4-1=15$. 故选 C.

2. D 【解析】对于 A,“全等三角形的面积相等”的否命题是“不全等三角形的面积不相等”,这显然是假命题,故 A 错误;对于 B,在$\triangle ABC$ 中,$A\in(0,\pi)$,由 $\sin A>\frac{1}{2}$,得$\frac{\pi}{6}<A<\frac{5\pi}{6}$,所以“$A>\frac{\pi}{6}$”是

“$\sin A>\frac{1}{2}$”的必要不充分条件,故 B 错误;对于 C,命题“$\forall x>1,x^3>x^2$”的否定是“$\exists x>1,x^3\leqslant x^2$”,故 C 错误;对于 D,$z=(1+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2=3-\mathrm{i}$,所以其对应的点为$(3,-1)$,在第四象限,故 D 正确. 故选 D.

3. D 【解析】设招商引资前经济收入为 M,则招商引资后经济收入为 $2M$. 对于 A,招商引资前工资净收入为 $M\times 60\%=0.6M$,招商引资后的工资净收入为 $2M\times 37\%=0.74M$,所以招商引资后,工资净收入增加了,故 A 错误;对于 B,招商引资前转移净收入为 $M\times 4\%=0.04M$,招商引资后转移净收入为 $2M\times 5\%=0.1M$,所以招商引资后,转移净收入是前一年的 2.5 倍,故 B 错误;对于 C,招商引资后,转移净收入与财产净收入的总和为 $0.1M+2M\times 28\%=0.66M<\frac{2}{5}\times 2M=0.8M$,所以招商引资后,转移净收入与财产净收入的总和低于该年经济收入的$\frac{2}{5}$,故 C 错误;对于 D,招商引资前经营净收入为 $M\times 30\%=0.3M$,招商引资后经营净收入为 $2M\times 30\%=0.6M$,所以招商引资后,经营净收入较前一年增加了一倍,故 D 正确. 故选 D.

4. C 【解析】函数 $f(x)=(m^2-3m-3)x^m$ 为幂函数,则 $m^2-3m-3=1$,解得 $m=4$ 或 $m=-1$. 当 $m=4$ 时,$f(x)=x^4$ 在区间$(0,+\infty)$上单调递增,不满足条件,排除 A. 当 $m=-1$ 时,$f(x)=x^{-1}$ 在区间$(0,+\infty)$上单调递减,满足题意. 函数 $f(x)=x^{-1}$ 在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上单调递减,但不是减函数,排除 B. 函数 $f(x)=x^{-1}$的图象关于原点对称,是奇函数. 故选 C.

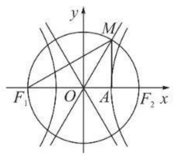
5. A 【解析】$f(x)=2\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{2}\right]\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$,则 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以 $f(x)$的对称轴为直线 $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,当 $k=1$ 时,$x=\frac{5\pi}{12}$. 故选 A.

6. B 【解析】对于 A,若 $m\perp\alpha,m\perp n$,则 $n/\!/\alpha$ 或 $n\subset\alpha$,故 A 错误;对于 B,若 $m/\!/\alpha,m/\!/\beta$,过 m 作平面与 α,β 分别交于直线 a,b,由线面平行的性质得 $m/\!/a,m/\!/b$,所以 $a/\!/b$,又 $b\subset\beta,a\not\subset\beta$,所以 $a/\!/\beta$,又 $n\subset\alpha$,$\alpha\cap\beta=n$,所以 $a/\!/n$,所以 $m/\!/n$,故 B 正确;对于 C,由面面垂直的性质定理可得,当 $m\subset\alpha$ 时,$m\perp\beta$,否则可能不成立,故 C 错误;对于 D,若 $m/\!/n,n\subset\alpha$,则 $m/\!/\alpha$ 或 $m\subset\alpha$,故 D 错误. 故选 B.

7. A 【解析】由已知,得 $0.8\times D^{\frac{12}{12}}=0.5$,所以 $D=\frac{5}{8}$,则有 $0.8\times\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{G}{12}}<0.2$,即$\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{G}{12}}<\frac{1}{4}$,即 $\frac{G}{12}\lg\frac{5}{8}<\lg\frac{1}{4}$,即 $G>\frac{12\lg\frac{1}{4}}{\lg\frac{5}{8}}=\frac{-24\lg 2}{1-4\lg 2}\approx 35.4$,因此 G 至少为 36. 故选 A.

8. B 【解析】设双曲线 C 的半焦距为 c. 如图,由题意可得,直线 OM 的方程为 $y=\frac{b}{a}x$,有 $\tan\angle MOA=\frac{b}{a}$,即有 $\sin\angle MOA=\frac{b}{a}\cos\angle MOA$. 又 $\sin^2\angle MOA+\cos^2\angle MOA=1$,解得 $\cos\angle MOA=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{c}$. 在$\triangle MOA$ 中,由余弦定理,得 $|MA|=\sqrt{|OM|^2+|OA|^2-2|OM||OA|\cos\angle MOA}=\sqrt{c^2+a^2-2ca\cdot\frac{a}{c}}=b$,因此$|MA|^2+|OA|^2=|OM|^2$,即有 $\angle OAM=90°$. 又 $|MF_1|=3|MA|$,则

$|MF_1|=3b$, $|F_1A|=2\sqrt{2}b$. 又 $|F_1A|=a+c$, 于是 $a+c=2\sqrt{2}b$, 所以 $(a+c)^2=8b^2$, 即 $a^2+2ac+c^2=8c^2-8a^2$, 化简得 $7e^2-2e-9=0$, 即 $(e+1)(7e-9)=0$, 解得 $e=-1$(舍去)或 $e=\frac{9}{7}$, 所以该双曲线的离心率 $e=\frac{9}{7}$. 故选 B.



9. A 【解析】由 $\frac{S_n}{n}<\frac{S_{n+1}}{n+1}$, 得 $\frac{n(a_1+a_n)}{2n}<\frac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2(n+1)}$, 即 $a_n<a_{n+1}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 为递增的等差数列. 因为 $S_5=S_{13}$, 所以 $a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}=0$, 即 $a_9+a_{10}=0$, 则 $a_9<0$, $a_{10}>0$, 所以当 $n\leqslant 9$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时, $a_n<0$; 当 $n\geqslant 10$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时, $a_n>0$. 因此, S_n 有最小值, 且最小值为 S_9. 故选 A.

10. D 【解析】5 名大学生分三组, 每组至少一人, 有两种情形, 分别为 2,2,1 人或 3,1,1 人. 当分为 3,1,1 人时, 有 $C_5^3A_3^3=60$ 种实习方案; 当分为 2,2,1 人时, 有 $\frac{C_5^2C_3^2}{A_2^2}\cdot A_3^3=90$ 种实习方案. 因此, 共有 $60+90=150$ 种实习方案, 其中大学生甲、乙到同一家企业实习的情况有 $C_3^1A_3^3+C_3^2A_3^3=36$ 种, 故大学生甲、乙到同一家企业实习的概率为 $\frac{36}{150}=\frac{6}{25}$. 故选 D.

11. C 【解析】在图 1 中, 以 B 为原点建立平面直角坐标系 xBy 如图 2 所示, 设阿氏圆圆心为 $O(a,0)$, 半径为 r. 因为 $|PA|=2|PB|$, 所以 $\frac{|PA|}{|PB|}=2$, 所以 $r=\left|\frac{2}{1-2^2}\right|\cdot|AB|=\frac{2}{3}\times 6=4$. 设圆 O 与 AB 交于点 M. 由阿氏圆性质, 知 $\frac{|MA|}{|MB|}=\lambda=2$. 又 $|MB|=4-|BO|=4-a$, 所以 $|MA|=2|MB|=8-2a$. 又 $|MA|+|MB|=6$, 所以 $8-2a+4-a=6$, 解得 $a=2$, 所以 $O(2,0)$, 所以点 P 在空间内的轨迹为以 O 为球心, 半径为 4 的球.

①当点 P 在面 ABB_1A_1 内部时, 如图 2 所示, 截面圆与 AB, BB_1 分别交于点 M, R, 所以点 P 在面 ABB_1A_1 内的轨迹为 $\overset{\frown}{MR}$. 因为在 $\mathrm{Rt}\triangle RBO$ 中, $|RO|=4$, $|BO|=2$, 所以 $\angle ROB=\frac{\pi}{3}$, 所以 $\overset{\frown}{MR}=\frac{\pi}{3}\times 4=\frac{4\pi}{3}$, 所以点 P 在面 ABB_1A_1 内部的轨迹长为 $\frac{4\pi}{3}$.

②同理, 点 P 在面 $ABCD$ 内部的轨迹长为 $\frac{4\pi}{3}$.

③当点 P 在面 BCC_1B_1 内部时, 如图 3 所示, 因为 $OB\perp$ 平面 BCC_1B_1, 所以平面 BCC_1B_1 截球所得小圆是以 B 为圆心, 以 BP 长为半径的圆, 截面圆与 BB_1, BC 分别交于点 R, Q, 且 $BP=\sqrt{OP^2-OB^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$, 所以点 P 在 BCC_1B_1 内的轨迹为 $\overset{\frown}{RQ}$, 且 $\overset{\frown}{RQ}=\frac{\pi}{2}\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}\pi$.

综上, 点 P 的轨迹长度为 $\frac{4\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}\pi=\frac{8\pi}{3}+\sqrt{3}\pi$. 故选 C.

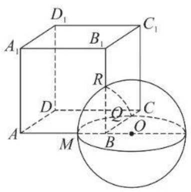


图 1

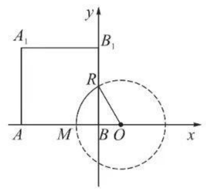


图 2

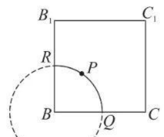
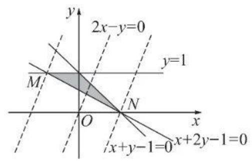


图 3

12. B 【解析】由 $\ln a$ 有意义可知,$a>0$. 由 $(\mathrm{e}-1)(\ln a+x)\geqslant a\mathrm{e}^x-1$,得 $(\mathrm{e}-1)\ln(a\mathrm{e}^x)\geqslant a\mathrm{e}^x-1$. 令 $t=a\mathrm{e}^x$,即有 $(\mathrm{e}-1)\ln t\geqslant t-1$. 因为 $x\in[0,1]$,所以 $t=a\mathrm{e}^x\in[a,a\mathrm{e}]$. 令 $f(t)=(\mathrm{e}-1)\ln t-t+1$,问题转化为存在 $t\in[a,a\mathrm{e}]$,使得 $f(t)\geqslant 0$. 因为 $f'(t)=\dfrac{\mathrm{e}-1-t}{t}$,令 $f'(t)<0$,即 $\mathrm{e}-1-t<0$,解得 $t>\mathrm{e}-1$;令 $f'(t)>0$,即 $\mathrm{e}-1-t>0$,解得 $0<t<\mathrm{e}-1$,所以 $f(t)$ 在 $(0,\mathrm{e}-1)$ 上单调递增,在 $(\mathrm{e}-1,+\infty)$ 上单调递减. 又 $f(1)=0$,$f(\mathrm{e})=(\mathrm{e}-1)\ln\mathrm{e}-\mathrm{e}+1=0$,所以当 $1\leqslant t\leqslant\mathrm{e}$ 时,$f(t)\geqslant 0$. 因为存在 $t\in[a,a\mathrm{e}]$,使得 $f(t)\geqslant 0$ 成立,所以只需 $a\leqslant\mathrm{e}$ 且 $a\mathrm{e}\geqslant 1$,解得 $a\in\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$. 故选 B.

13. 2 【解析】作约束条件 $\begin{cases}y\leqslant 1,\\ x+y\leqslant 1,\\ 2y+x\geqslant 1\end{cases}$ 的可行域,如图所示. 由 $\begin{cases}x+y=1,\\ 2y+x=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=0.\end{cases}$ 令 $N(1,0)$. 将目标函数 $z=2x-y$ 变形为 $y=2x-z$. 根据其几何意义可得,当直线 $y=2x-z$ 经过点 $N(1,0)$ 时,其纵截距最小,即目标函数 z 取到最大值,则 $z=2x-y$ 的最大值为 2.



14. $-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{2}$ 【解析】因为 $a_na_{n+2}=a_{n+1}^2$,$n\in\mathbf{N}^*$,所以数列 $\{a_n\}$ 为等比数列,设其公比为 q. 由 $a_7=16$,$a_3a_5=a_4^2=4$,得 $a_4=\pm 2$,$q^3=\dfrac{a_7}{a_4}=\pm 8$,所以 $q=\pm 2$. 当 $q=2$ 时,$a_4=2$,则 $a_2=\dfrac{1}{2}$;当 $q=-2$ 时,$a_4=-2$,则 $a_2=-\dfrac{1}{2}$. 综上,a_2 的值为 $-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{2}$.

15. $\left(\mathrm{e}-4,\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}\right)\cup\{\mathrm{e}\}$ 【解析】当 $x\leqslant 1$ 时,$f(x)=-x^3-3x^2+\mathrm{e}$,$f'(x)=-3x(x+2)$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减,在 $(-2,0)$ 上单调递增,在 $(0,1)$ 上单调递减,且 $f(-2)=f(1)=-4+\mathrm{e}$,$f(0)=\mathrm{e}$;当 $x>1$ 时,$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$,$f'(x)=\dfrac{x-2}{x^3}\mathrm{e}^x$,所以 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减,在 $(2,+\infty)$ 上单调递增,且当 $x\to 1$ 时 $f(x)\to\mathrm{e}$,$f(2)=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$. 作出函数 $f(x)$ 的示意图(略)可知,$g(x)=f(x)-m$ 有且只

有三个零点,需满足 $m\in\left(e-4,\frac{e^2}{4}\right)\cup\{e\}$.

16. ①②④ 【解析】设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$. 由 $y=x^2$,得 $y'=2x$,故 $k_A=2x_1$,$k_B=2x_2$,所以切线 PA 的方程为 $y-x_1^2=2x_1(x-x_1)$,即 $x_1^2-2x_1x+y=0$. 同理可得,切线 PB 的方程为 $x_2^2-2x_2x+y=0$. 设点 P 的坐标为 (x_0,y_0),所以 $x_1^2-2x_1x_0+y_0=0$,$x_2^2-2x_2x_0+y_0=0$,所以 x_1,x_2 为方程 $x^2-2x_0x+y_0=0$ 的两根,故 $x_1+x_2=2x_0$,$x_1x_2=y_0$,则 $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=x_1+x_2=2x_0$,所以直线 AB 的方程为 $y-x_1^2=2x_0(x-x_1)$.

因为 $k_{AB}=x_1+x_2$,$k_A=2x_1$,$k_B=2x_2$,所以 $k_{AB}=\frac{1}{2}(k_A+k_B)$,所以 k_A,k_{AB},k_B 成等差数列,故①正确;

若 $x_0=\frac{1}{3}$,则 $k_{AB}=2x_0=\frac{2}{3}$,故②正确;

若点 P 在抛物线的准线上,则 $y_0=-\frac{1}{4}$,所以 $k_Ak_B=4x_1x_2=4y_0=-1$,故两切线垂直,所以△ABP 为直角三角形,故③错误;

若点 P 在直线 $y=2x-1$ 上,则 $y_0=2x_0-1$. 由直线 AB 的方程 $y-x_1^2=2x_0(x-x_1)$,得 $y=2x_0x-2x_0x_1+x_1^2$. 又 $y_0=2x_0x_1-x_1^2$,故直线 AB 的方程为 $y=2x_0x-y_0$,即 $y=2x_0(x-1)+1$,所以直线 AB 恒过定点(1,1),故④正确.

17. 解:(Ⅰ)由表格数据,得 $\bar{x}=\frac{2+3+4+5+6+7+8}{7}=5$,$\bar{y}=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}y_i=\frac{405}{7}$, ························ 2 分

$$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2=(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2+3^2=28.$$

由公式,得 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}x_iy_i-7\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{7}x_i^2-7\bar{x}^2}=\frac{2305-7\times5\times\frac{405}{7}}{28}=10$,

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=\frac{405}{7}-10\times5=\frac{55}{7}$,

故 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=10x+\frac{55}{7}$. ························ 6 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)可得,$z=2\sqrt{10x+\frac{55}{7}}-x$.

设 $\sqrt{10x+\frac{55}{7}}=t$,则 $x=\frac{1}{10}t^2-\frac{11}{14}$,

所以 $z=2t-\left(\frac{1}{10}t^2-\frac{11}{14}\right)=-\frac{1}{10}t^2+2t+\frac{11}{14}$,

故当 $t=10$ 时,z 取得最大值, ························ 10 分

此时 $x=10-\frac{11}{14}\approx9.2$,

即年广告费 x 约为 9.2 万元时,年利润的预报值最大. ························ 12 分

18. (Ⅰ)证明:因为四边形 $ABCD$ 为菱形,所以 $AC\perp BD$.

因为 $ED \perp$ 平面 $ABCD$，$AC \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $ED \perp AC$.

又 $ED \cap BD = D$，$ED, BD \subset$ 平面 $BDEF$，

所以 $AC \perp$ 平面 $BDEF$.

又 $AC \subset$ 平面 AFC，

所以平面 $BDEF \perp$ 平面 AFC. ………………………………………………………… 6 分

(Ⅱ)解：如图，设 BD 交 AC 于点 O，以 OA 为 x 轴，OB 为 y 轴，过点 O 且平行于 DE 的方向为 z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

设 $BF=1$，则 $OB=OD=1$，$DE=2$.

因为 $AB=AD$，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，

所以 $\triangle BAD$ 是正三角形，则 $OC=OA=\sqrt{3}$.

由上述可知，$A(\sqrt{3},0,0)$，$F(0,1,1)$，$E(0,-1,2)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，

则 $\overrightarrow{AF}=(-\sqrt{3},1,1)$，$\overrightarrow{EF}=(0,2,-1)$，$\overrightarrow{EC}=(-\sqrt{3},1,-2)$. ………………………… 8 分

设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

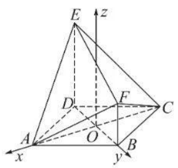
则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-\sqrt{3}x+y+z=0,\\ 2y-z=0,\end{cases}$ 取 $y=1$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,2)$.

同理可得，平面 EFC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},1,2)$， ………………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-3+1+4}{3+1+4}=\frac{1}{4}$. ……………………………………… 11 分

又二面角 $A-EF-C$ 为钝角，

故二面角 $A-EF-C$ 的余弦值为 $-\frac{1}{4}$. ……………………………………………… 12 分



19. 解：因为 $\sqrt{3}b\sin\frac{B+C}{2}=a\sin B$，

所以 $\sqrt{3}b\sin\frac{\pi-A}{2}=a\sin B$，即 $\sqrt{3}b\cos\frac{A}{2}=a\sin B$.

由正弦定理，得 $\sqrt{3}\sin B\cdot\cos\frac{A}{2}=\sin A\cdot\sin B$.

因为 $\sin B\neq 0$，所以 $\sqrt{3}\cos\frac{A}{2}=\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$.

因为 $\cos\frac{A}{2}\neq 0$，所以 $\sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又因为 $0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{A}{2}=\frac{\pi}{3}$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. ………………………………………………………… 4 分

（Ⅰ）因为 D 为边 BC 中点，所以 $2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，则 $4|\overrightarrow{AD}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2$.

又 $AD=\sqrt{3}$，$b=2$，$A=\frac{2\pi}{3}$，

所以 $12=c^2+4+4c\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$，即 $c^2-2c-8=0$，即 $(c-4)(c+2)=0$，

所以 $c=4$. ………………………………………………………………………………………… 6 分

（Ⅱ）在△ABC 中，由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\angle BAC$.

又 $a=4$，$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，所以 $16=b^2+c^2+bc$，

所以 $16=(b+c)^2-bc\geqslant(b+c)^2-\frac{(b+c)^2}{4}=\frac{3}{4}(b+c)^2$，当且仅当 $b=c$ 时取等号，

所以 $(b+c)^2\leqslant\frac{64}{3}$，

所以 $4<b+c\leqslant\frac{8\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………………………………… 8 分

因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，$AD$ 平分 $\angle BAC$，$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，

所以 $\frac{1}{2}bc\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}b\cdot AD\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}c\cdot AD\cdot\sin\frac{\pi}{3}$，

所以 $bc=AD\cdot(b+c)$，

所以 $AD=\frac{bc}{b+c}=\frac{(b+c)^2-16}{b+c}=b+c-\frac{16}{b+c}$. ……………………………………………… 10 分

令 $t=b+c$，则 $AD=t-\frac{16}{t}$，$4<t\leqslant\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

因为 $y=t-\frac{16}{t}$ 在 $\left(4,\frac{8\sqrt{3}}{3}\right]$ 上单调递增，

所以当 $t=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 即 $b=c=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，y 取得最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以 AD 的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………………………………… 12 分

20.（Ⅰ）解：由题意，得 $\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=-\frac{1}{4}(|x|\neq2)$，

化简得 $\frac{x^2}{4}+y^2=1(|x|\neq2)$，

所以曲线 C 为中心在坐标原点，焦点在 x 轴上的椭圆，不含左、右顶点. ………………………… 4 分

（Ⅱ）①证明：设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

因为若直线 PQ 的斜率为 0，则点 P，Q 关于 y 轴对称，必有 $k_{AP}=-k_{BQ}$，不合题意，

所以直线 PQ 的斜率必不为 0.

设直线 PQ 的方程为 $x=ty+n(n\neq\pm2)$.

由$\begin{cases}x^2+4y^2=4,\\x=ty+n,\end{cases}$得$(t^2+4)y^2+2tny+n^2-4=0$,

所以$\Delta=4t^2n^2-4(t^2+4)(n^2-4)>0$,且$\begin{cases}y_1+y_2=-\dfrac{2tn}{t^2+4},\\y_1y_2=\dfrac{n^2-4}{t^2+4}.\end{cases}$ ………………………………… 6 分

因为点$P(x_1,y_1)$是曲线C上一点,

所以由题意可知$k_{AP}\cdot k_{BP}=-\dfrac{1}{4}$,

所以$k_{AP}=-\dfrac{1}{4k_{BP}}=7k_{BQ}$,即$28k_{BP}\cdot k_{BQ}=-1$. ………………………………… 7 分

因为$28k_{BP}\cdot k_{BQ}=\dfrac{28y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=\dfrac{28y_1y_2}{(ty_1+n-2)(ty_2+n-2)}=\dfrac{28y_1y_2}{t^2y_1y_2+t(n-2)(y_1+y_2)+(n-2)^2}$

$=\dfrac{\dfrac{28(n^2-4)}{t^2+4}}{\dfrac{t^2(n^2-4)}{t^2+4}-\dfrac{2t^2n(n-2)}{t^2+4}+(n-2)^2}=\dfrac{28(n+2)}{t^2(n+2)-2t^2n+(n-2)(t^2+4)}=\dfrac{28(n+2)}{4(n-2)}=\dfrac{7n+14}{n-2}=-1$,

所以$n=-\dfrac{3}{2}$,此时$\Delta=16(t^2+4-n^2)=4(4t^2+7)>0$,

故直线PQ恒过x轴上一定点$\left(-\dfrac{3}{2},0\right)$. ………………………………… 9 分

②解:由①可得,$y_1+y_2=\dfrac{3t}{t^2+4}$,$y_1y_2=-\dfrac{7}{4(t^2+4)}$,

所以$S=\dfrac{1}{2}\cdot|y_1-y_2|\cdot\left|2-\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right|=\dfrac{7}{4}|y_1-y_2|$

$=\dfrac{7}{4}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{4t^2+7}}{t^2+4}$ ………………………………… 10 分

$=\dfrac{7}{2}\sqrt{\dfrac{4(t^2+4)-9}{(t^2+4)^2}}=\dfrac{7}{2}\sqrt{\dfrac{4}{t^2+4}-\dfrac{9}{(t^2+4)^2}}=\dfrac{7}{2}\sqrt{-9\left(\dfrac{1}{t^2+4}-\dfrac{2}{9}\right)^2+\dfrac{4}{9}}\leqslant\dfrac{7}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{3}$,

当且仅当$\dfrac{1}{t^2+4}=\dfrac{2}{9}$即$t^2=\dfrac{1}{2}$时等号成立,

所以S的最大值为$\dfrac{7}{3}$. ………………………………… 12 分

21. (Ⅰ)解:由$f(x)\geqslant0$,得$\ln x-a\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\geqslant0$.

令$h(x)=\ln x-a\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$,则$h(x)\geqslant0$,$h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{x-a}{x^2}$.

注意到$h(1)=0$,所以$x=1$是函数$h(x)$的极小值点,则$h'(1)=0$,

所以$h'(1)=\dfrac{1-a}{1}=0$,得$a=1$. ………………………………… 3 分

当$a=1$时,$h'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$,则函数$h(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,

所以$h(x)\geqslant h(1)=0$,满足条件,故$a=1$. ………………………………… 5 分

(Ⅱ)证明：由(Ⅰ)可得，$\ln x\geqslant 1-\frac{1}{x}(x\geqslant 1)$.

令$\frac{1}{k}=1-\frac{1}{x}$，则$x=\frac{k}{k-1}$，

所以$\ln\frac{k}{k-1}\geqslant\frac{1}{k}$，即$\frac{1}{k}\leqslant\ln k-\ln(k-1),k\in\{2,3,\cdots,n\}$. ……………………………… 7分

令$g(x)=x-\sin x(x>0)$，则$g'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，且$g'(x)$不恒为零，

所以函数$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

故$g(x)>g(0)=0$，则$\sin x<x(x>0)$，……………………………… 9分

所以$\sin\frac{1}{k}<\frac{1}{k}\leqslant\ln k-\ln(k-1),k\in\{2,3,\cdots,n\}$，……………………………… 10分

所以$\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{3}+\cdots+\sin\frac{1}{n}<[\ln 2-\ln 1]+[\ln 3-\ln 2]+\cdots+[\ln n-\ln(n-1)]=\ln n$. 证毕.

……………………………… 12分

22. 解：(Ⅰ)当$k=1$时，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=4\sin t\cos t,\\y=\cos t-\sin t\end{cases}$($t$为参数).

因为$y^2=\cos^2t+\sin^2t-2\cos t\sin t=1-\frac{1}{2}x$，且$x=2\sin 2t\in[-2,2]$，

所以曲线C_1的直角坐标方程为$y^2=1-\frac{1}{2}x(-2\leqslant x\leqslant 2)$. ……………………………… 5分

(Ⅱ)当$k=4$时，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=4\sin t\cos t,\\y=\cos^4t-\sin^4t\end{cases}$($t$为参数).

因为$y=(\cos^2t+\sin^2t)(\cos^2t-\sin^2t)=\cos 2t,x=2\sin 2t$，

所以曲线C_1的直角坐标方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

设直线l的参数方程为$\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$($t$为参数).

将直线l的参数方程代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，得$5t^2-2\sqrt{2}t-6=0$.

设点A,B,M对应的参数分别为t_1,t_2,t_M.

由韦达定理，得$t_1+t_2=\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

又线段AB的中点为M，所以$t_M=\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{\sqrt{2}}{5}$，

所以$|PM|=|t_M|=\frac{\sqrt{2}}{5}$. ……………………………… 10分

23. (Ⅰ)解：当$x\leqslant 1$时，$f(x)=x^2-2x+2$，所以$f(x)=x^2-2x+2\geqslant 2$，解得$x\leqslant 0$；

当$1<x<2$时，$f(x)=-x^2+4x-2$，所以$f(x)=-x^2+4x-2\geqslant 2$的解集为$\varnothing$；

当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)=x^2-2x+2$，所以 $f(x)=x^2-2x+2\geqslant 2$，解得 $x\geqslant 2$.

综上，$f(x)\geqslant 2$ 的解集为 $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$. ……………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)证明：由(Ⅰ)可知，$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+2, x\leqslant 1,\\ -x^2+4x-2, 1<x<2,\\ x^2-2x+2, x\geqslant 2.\end{cases}$

当 $x=1$ 时，$m=f(x)=1$，

所以 $a+b+c=6m=6$.

由柯西不等式可得，$(\sqrt{a}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+2})^2=(\sqrt{a}\times 1+\sqrt{b+1}\times 1+\sqrt{c+2}\times 1)^2\leqslant(a+b+1+c+2)\times(1+1+1)=27$，

所以 $\sqrt{a}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+2}\leqslant 3\sqrt{3}$，当且仅当 $a=3,b=2,c=1$ 时等号成立，原命题得证. ……… 10 分