

## 2020—2021 学年度第二学期高三年级三调考试 数学试卷(新高考)

### 第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、单项选择题(每小题 5 分,共 40 分。下列每小题所给选项只有一项符合题意,请将正确答案的序号填涂在答题卡上)

1. 已知全集  $U$ ,  $M$ ,  $N$  是  $U$  的非空子集,且  $\complement_U M \supseteq N$ , 则必有 ( )

- A.  $M \subseteq \complement_U N$       B.  $M \supseteq \complement_U N$       C.  $\complement_U M = \complement_U N$       D.  $M \subseteq N$

2. 哥隆尺是一种特殊的尺子,图 1 的哥隆尺可以一次性度量的长度为 1, 2, 3, 4, 5, 6. 图 2 的哥隆尺不能一次性度量的长度为 ( )



图 1

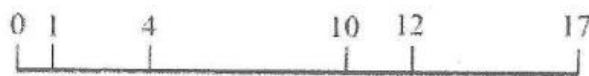


图 2

- A. 11      B. 13      C. 15      D. 17

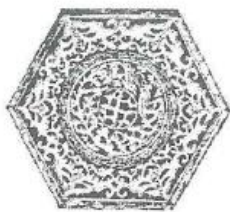
3. 今天是星期日,经过 7 天后还是星期日,那么经过  $8^{2021}$  天后是 ( )

- A. 星期六      B. 星期日      C. 星期一      D. 星期二

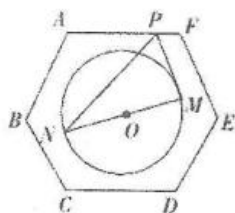
4. 复数  $z \in \mathbb{C}$ , 在复平面内  $z$  对应的点  $Z$ , 满足  $1 \leq |z - \frac{1}{1+i}| \leq 2$ , 则点  $Z$  所在区域的面积 ( )

- A.  $\pi$       B.  $2\pi$       C.  $3\pi$       D.  $4\pi$

5. 窗花是贴在窗纸或窗户玻璃上的剪纸,是中国古老的传统民间艺术之一。每年新春佳节,我国许多地区的人们都有贴窗花的习俗,以此达到装点环境、渲染气氛的目的,并寄托着辞旧迎新、接福纳祥的愿望。图一是一张由卷曲纹和回纹构成的正六边形剪纸窗花,已知图二中正六边形  $ABCDEF$  的边长为 4, 圆  $O$  的圆心为正六边形的中心,半径为 2, 若点  $P$  在正六边形的边上运动,  $MN$  为圆  $O$  的直径, 则  $\overline{PM} \cdot \overline{PN}$  的取值范围是 ( )



图一



图二

- A.  $[6, 12]$       B.  $[8, 12]$       C.  $[6, 16]$       D.  $[8, 16]$

6. 已知函数  $f(x) = x^2$ , 设  $a = \log_5 4$ ,  $b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$ ,  $c = 2^{\frac{1}{5}}$ , 则  $f(a)$ ,  $f(b)$ ,  $f(c)$  的

大小关系为

- A.  $f(a) > f(b) > f(c)$       B.  $f(b) > f(c) > f(a)$   
C.  $f(c) > f(b) > f(a)$       D.  $f(c) > f(a) > f(b)$

7. 密位制是度量角的一种方法. 把一周角等分为 6000 份, 每一份叫做 1 密位的角. 以密位作为角的度量单位, 这种度量角的单位制, 叫做角的密位制. 在角的密位制中, 采用四个数码表示角的大小, 单位名称密位二字可以省去不写. 密位的写法是在百位数与十位数字之间画一条短线, 如密位 7 写成“0-07”, 478 密位写成“4-78”, 1 周角等于 6000 密位, 记作 1 周角 = 60-00, 1 直角 = 15-00. 如果一个半径为 2 的扇形, 它的面积为  $\frac{7}{6}\pi$ , 则其圆心角用

密位制表示为 ( )

- A. 12-50      B. 17-50      C. 21-00      D. 35-00

8. 已知实数  $x, y$  满足  $x^2 + y^2 = 1, 0 < x < 1, 0 < y < 1$ , 当  $\frac{4}{x} + \frac{1}{y}$  取最小值时,  $\frac{x}{y}$  的值为 ( )

- A.  $\sqrt[3]{4}$       B.  $\sqrt[3]{3}$       C.  $\sqrt{3}$       D. 1

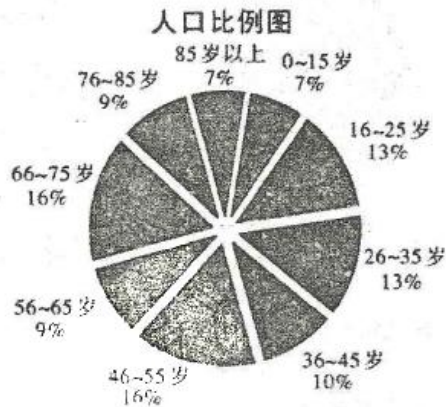
二、多项选择题 (每小题 5 分, 共 20 分. 下列每小题所给选项至少有一项符合题意, 请将正确答案的序号填涂在答题卡上)

9. 下列命题中为真命题的是 ( )

- A. 若  $a > b$ , 则  $\frac{a}{b} > 1$       B. 若  $ac^2 \geq bc^2$ , 则  $a \geq b$   
C. 若  $c > a > b > 0$ , 则  $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$       D. 若  $a > b$ , 则  $a^{\frac{1}{3}} > b^{\frac{1}{3}}$

10. 据了解,到本世纪中叶中国人口老龄化问题将日趋严重,如图是专家预测中国 2050 年人口比例图,若从 2050 年开始退休年龄将延迟到 65 岁,则下列叙述正确的是 ( )

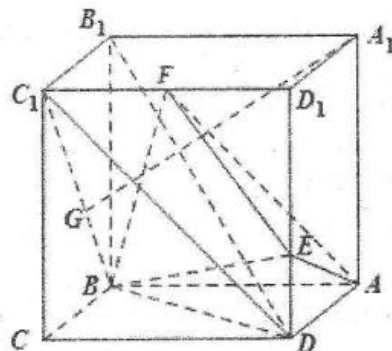
- A. 到 2050 年已经退休的人数将超过 30%  
B. 2050 年中国 46~55 岁的人数比 16~25 岁的人数多 30%  
C. 2050 年中国 25 岁以上未退休的人口数大约是已退休人口数的 1.5 倍



- D. 若从中抽取 10 人,则抽到 5 人的年龄在 36~45 岁之间的概率为  $\left(\frac{1}{10}\right)^5 \times \left(\frac{9}{10}\right)^5$

11. 如图,在棱长为 6 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $E$  为棱  $DD_1$  上一点,且  $DE=2$ ,  $F$  为棱  $C_1D_1$  的中点,点  $G$  是线段  $BC_1$  上的动点,则 ( )

- A. 无论点  $G$  在线段  $BC_1$  上如何移动,都有  $A_1G \perp B_1D$   
B. 四面体  $A-BEF$  的体积为 24  
C. 直线  $AE$  与  $BF$  所成角的余弦值为  $\frac{2\sqrt{10}}{15}$   
D. 直线  $A_1G$  与平面  $BDC_1$  所成最大角的余弦值为  $\frac{1}{3}$



12. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} + a_n = n \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ , 其前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $m + S_{2019} = -1009$ , 则下列说法正确的是 ( )

- A.  $m$  为定值  
B.  $m + a_1$  为定值  
C.  $S_{2019} - a_1$  为定值  
D.  $ma_1$  有最大值

第II卷(共90分)

三、填空题:(本大题共4小题,每题5分,共20分;第16题第一个空2分,第二个空3分)

13. 已知 $\alpha, \beta$ 均为锐角,且 $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2}$ ,若 $\sin(2\alpha + \beta) = \frac{3}{2}\sin \beta$ ,则 $\frac{\tan(\alpha + \beta)}{\tan \alpha} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 描金又称泥金画漆,是一种传统工艺美术技艺.起源于战国时期,在漆器表面,用金色描绘花纹的装饰方法,常以黑漆作底,也有少数以朱漆为底.描金工作分为两道工序,第一道工序是上漆,第二道工序是描绘花纹.现甲、乙两位工匠要完成 $A, B, C$ 三件原料的描金工作,每件原料先由甲上漆,再由乙描绘花纹.每道工序所需的时间(单位:h)如下:

| 原料时间工序 | 原料A | 原料B | 原料C |
|--------|-----|-----|-----|
| 上漆     | 9   | 16  | 10  |
| 描绘花纹   | 15  | 8   | 14  |

则完成这三件原料的描金工作最少需要 $\underline{\hspace{2cm}}$ h.

15. 对任意两实数 $a, b$ ,定义运算 $*$ : $a * b = \begin{cases} 2a - 2b, a \geq b \\ 2b - 2a, a < b \end{cases}$ ,则函数 $f(x) = \sin x * \cos x$ 的值域为 $\underline{\hspace{2cm}}$ .

16. 已知点 $M$ 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 在第一象限上一点,点 $F$ 为双曲线 $C$ 的右焦点, $O$ 为坐标原点, $4|MO| = 4|MF| = 7|OF|$ ,则双曲线 $C$ 的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ;若 $MF, MO$ 分别交双曲线 $C$ 于 $P, Q$ 两点,记直线 $QM$ 与 $PQ$ 的斜率分别为 $k_1, k_2$ ,则 $k_1 \cdot k_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

四、解答题：（本大题共 6 小题，共 70 分；第 17 题 10 分，第 18-22 题 12 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。）

17. 已知数列  $\{a_n\}$  是等差数列，设  $S_n (n \in \mathbb{N}^*)$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，数列  $\{b_n\}$  是等比数列，

$$b_n > 0, \text{ 若 } a_1 = 3, b_1 = 1, b_3 + S_2 = 12, a_5 - 2b_2 = a_3.$$

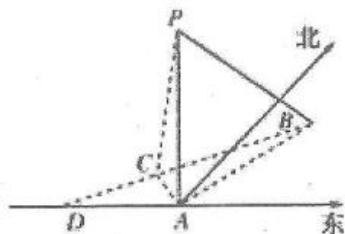
(1) 求数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式；

(2) 若  $c_n = \begin{cases} \frac{2}{S_n}, & n \text{ 为奇数}, \\ S_n, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$  求数列  $\{c_n\}$  的前  $2n$  项和.

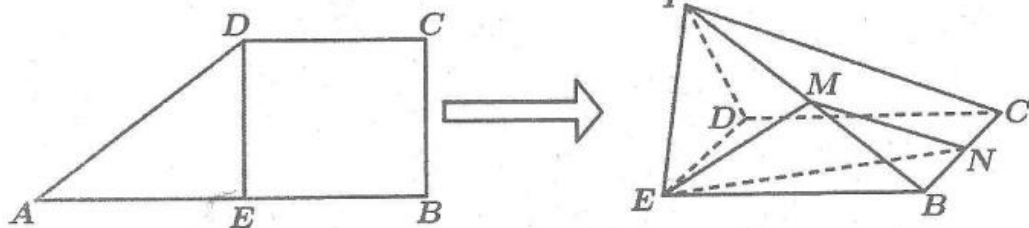
18. 如图，在海岛 A 上有一座海拔 1 千米的山，山顶设有一个观察站 P，上午 11 时，测得一轮船在岛北偏东  $30^\circ$ ，俯角为  $30^\circ$  的 B 处，到 11 时 10 分又测得该船在岛北偏西  $60^\circ$ ，俯角为  $60^\circ$  的 C 处。

(1) 求船的航行速度是每小时多少千米？

(2) 又经过一段时间后，船到达海岛的正西方向的 D 处，问此时船距岛 A 有多远？



19. 如图，在直角梯形  $ABCD$  中， $AB \parallel DC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 2DC = 2BC$ ， $E$  为  $AB$  的中点，沿  $DE$  将  $\triangle ADE$  折起，使得点  $A$  到点  $P$  位置，且  $PE \perp EB$ ， $M$  为  $PB$  的中点， $N$  是  $BC$  上的动点（与点  $B, C$  不重合）。



(1) 求证：平面  $EMN \perp$  平面  $PBC$ ；

(2) 是否存在点  $N$ ，使得二面角  $B-EN-M$  的余弦值  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ？若存在，确定  $N$  点位置；若不存在，说明理由。

20. 甲、乙、丙三人组建团队参加学校元旦游园活动中的投篮比赛, 比赛规则: ①按照甲、乙、丙的顺序进行投篮, 每人至多投篮两次; ②选手投篮时, 如果第一次投中, 记 1 分, 并再投篮一次, 若第二次命中, 则再记 2 分, 第二次没有命中, 则记 0 分; 如果第一次没有投中, 记 0 分, 换下一个选手进行投篮. 甲、乙、丙投篮的命中率分别为 0.6, 0.5, 0.7.

(1) 求甲、乙、丙三人一共投篮 5 次的概率;

(2) 设甲、乙、丙三人得分总和  $X$ , 若  $X \leq 1$ , 则该团队无奖品; 若  $2 \leq X \leq 3$ , 则该团队获得 20 元的奖品; 若  $4 \leq X \leq 7$ , 则该团队获得 50 元的奖品; 若  $X \geq 8$ , 则该团队获得 200 元的奖品. 求该团队获得奖品价值  $Y$  的期望.

21. 已知  $A_1, A_2$  分别为椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右顶点,  $B$  为椭圆  $C$  的上顶点,

点  $A_2$  到直线  $A_1B$  的距离为  $\frac{4\sqrt{7}b}{7}$ , 椭圆  $C$  过点  $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{2}\right)$ .

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 设直线  $l$  过点  $A_1$ , 且与  $x$  轴垂直,  $P, Q$  为直线  $l$  上关于  $x$  轴对称的两点, 直线  $A_2P$  与椭圆  $C$  相交于异于  $A_2$  的点  $D$ , 直线  $DQ$  与  $x$  轴的交点为  $E$ , 当  $\triangle PA_2Q$  与  $\triangle PEQ$  的面积之差取得最大值时, 求直线  $A_2P$  的方程.

22. 已知函数  $f(x) = 3x - (a+1)\ln x, g(x) = x^2 - ax + 4$ .

(1) 若函数  $y = f(x) + g(x)$  在其定义域内单调递增, 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 是否存在实数  $a$ , 使得函数  $y = f(x) - g(x)$  的图象与  $x$  轴相切? 若存在, 求满足条件的  $a$  的取值范围, 若不存在, 请说明理由.

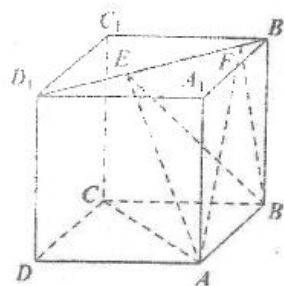


## 更换原 11 题

11. 如图, 正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 1, 线段  $B_1D_1$  上有两个动点  $E$ 、 $F$ , 且  $EF = \frac{1}{2}$ ,

则下列结论中正确的是 ( )

- A.  $AC \perp BE$
- B.  $EF \parallel$  平面  $ABCD$
- C.  $\triangle AEF$  的面积与  $\triangle BEF$  的面积相等
- D. 三棱锥  $A - BEF$  的体积为定值



祝大家取得好成绩!

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》