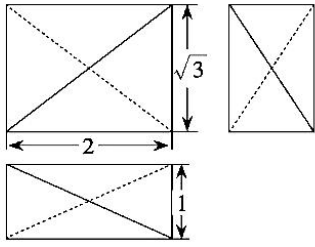




4. 丹麦化学家索伦森是首位建立 PH 值概念的 biochemist，他把 PH 值定义为  $\text{PH} = -\lg [\text{H}^+]$ ，式子中的  $[\text{H}^+]$  指的是溶液中的氢离子的浓度，单位为摩尔/升 (mol/L)，若某种溶液中的氢离子的浓度为  $6 \times 10^{-8}$  mol/L，则该溶液的 PH 值约为 ( $\ln 6 \approx 0.78$ ) ( )
- A. 8                      B. 7.78                      C. 7.22                      D. 6
5. 已知直线  $l: \sqrt{2}x - y - \sqrt{2} = 0$  与抛物线  $C: y^2 = 4x$  交于  $A, B$  两点，点  $A, B$  到  $x$  轴的距离分别为  $m, n$ ，则  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} =$  ( )
- A.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$                       C.  $\frac{\sqrt{6}}{4}$                       D.  $\frac{\sqrt{6}}{6}$
6. 已知单位向量  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  的夹角为  $\theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ ，且向量  $2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$  与  $\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$  的夹角为  $120^\circ$ ，则  $\theta =$  ( )
- A.  $\frac{5\pi}{12}$                       B.  $\frac{\pi}{3}$                       C.  $\frac{\pi}{4}$                       D.  $\frac{\pi}{6}$
7.  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ， $a = 3, b = 4, c = \sqrt{13}$ ，点  $D, E$  分别是边  $BC, BA$  的中点，且  $AD, CE$  交于点  $O$ ，则四边形  $BDOE$  的面积为 ( )
- A.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$                       B.  $\frac{4\sqrt{3}}{5}$                       C.  $\sqrt{3}$                       D.  $\frac{5\sqrt{3}}{4}$
8. 右图为某四面体的三视图，则该几何体的表面积为 ( )
- A.  $6\sqrt{2}$   
B.  $2\sqrt{19}$   
C.  $4\sqrt{5}$   
D.  $2\sqrt{21}$
- 
9. 已知函数  $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ , ( $\omega > 0, -\pi < \varphi < 0$ ),  $f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，且  $f(x)$  在  $[0, 100\pi]$  上恰有 50 个零点，则  $\omega$  的取值范围是 ( )
- A.  $[\frac{38}{75}, \frac{31}{60})$                       B.  $(\frac{38}{75}, \frac{31}{60}]$                       C.  $[\frac{149}{300}, \frac{38}{75})$                       D.  $(\frac{149}{300}, \frac{38}{75}]$
10. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = n^2 - 20n + 29$ ，则数列  $\{|a_n|\}$  的前 50 项和为 ( )
- A. 2022                      B. 1800                      C. 1700                      D. 1691
11. 双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ，过  $F_2$  的直线与  $C$  交于  $A, B$  两点，且  $\vec{AF_2} = 2\vec{F_2B}$ ， $\angle ABF_1 = 60^\circ$ ，则双曲线  $C$  的离心率为 ( )
- A.  $\frac{7}{3}$                       B. 2                      C.  $\frac{5}{3}$                       D.  $\frac{4}{3}$
12. 设  $a = \log_6 4, b = \log_9 5, c = \log_3 \pi$ ，则 ( )
- A.  $a < b < c$                       B.  $b < a < c$                       C.  $b < c < a$                       D.  $c < a < b$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y - 1 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ , 则  $y - 2x$  的最大值为\_\_\_\_\_.

14. 某高中数学兴趣小组有男生3人，女生2人，从中选取3人参加数学竞赛，则这3人中恰有2个男生的概率为\_\_\_\_\_.

15. 在四棱锥  $S - ABCD$  中，底面  $ABCD$  为矩形，平面  $SAC \perp$  平面  $ABCD$ ,  $\cos \angle SAC = -\frac{1}{3}$ ,  $SC = 4$ , 则四棱锥  $S - ABCD$  外接球的表面积为\_\_\_\_\_.

16. 关于函数  $f(x) = 3 \cos x - \frac{2}{\cos x}$  有如下四个命题：

- ①  $f(x)$  的定义域是  $\left\{x \mid x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ ;
- ②  $f(x)$  图象关于  $y$  轴对称;
- ③  $f(x)$  的图象关于点  $(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  对称;
- ④  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递减, 在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上单调递增.

其中所有真命题的序号是\_\_\_\_\_.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答，第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共60分。

17. (12分) 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且满足  $a_1 = -3$ ,  $2a_{n+1} = 3a_n + 4$ .

- (1) 证明：数列  $\{a_n + 4\}$  为等比数列;
- (2) 求  $S_n$  的最小值.



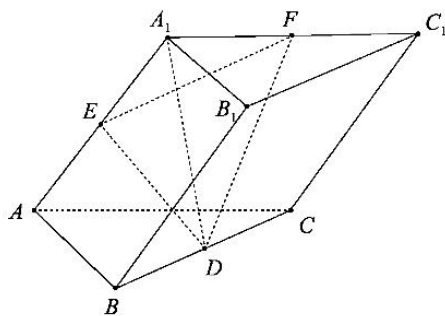
18. (12分) 2022年2月4日—2月20日，北京冬奥会顺利召开，全民关注冬奥赛事. 为了更好的普及冬奥知识，某中学举办了冬奥知识竞赛，并随机抽取了100名学生的成绩，且这100名学生的成绩(单位：分)都在  $[50, 100]$ , 其频数分布表如下图所示.

成绩(单位：分)	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100]
人数	6	4	$a$	$b$	18

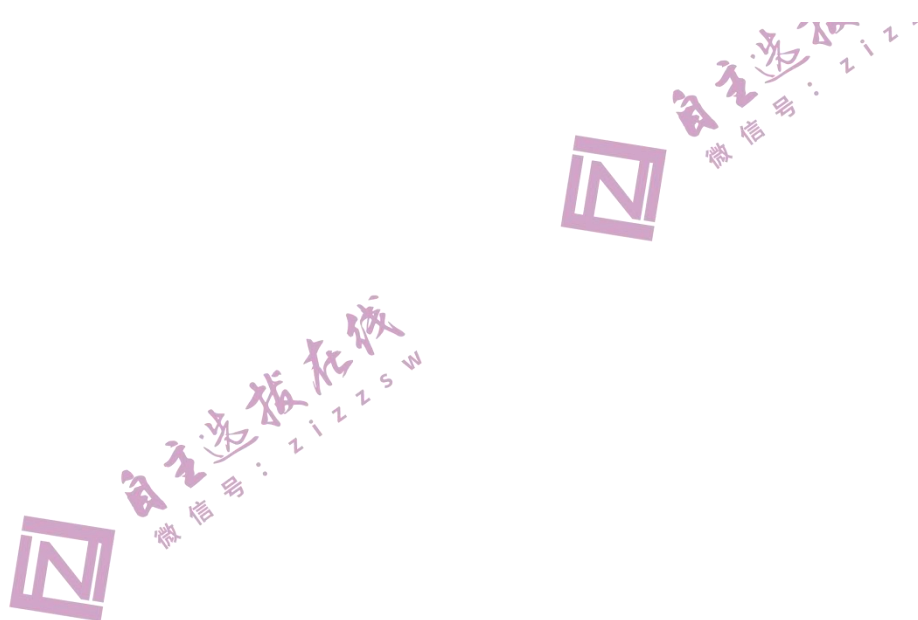
由分布表得知该中学冬奥知识竞赛成绩的中位数的估计值为82分.

- (1) 求  $a, b$  的值;
- (2) 该中学冬奥知识竞赛成绩的平均数与标准差的估计值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表). (参考数据:  $\sqrt{26} \approx 5.1$ )

19. (12分) 如图, 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AA_1 = AC = 2$ ,  $\angle A_1AC = 60^\circ$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ , 点  $D, E, F$  分别为线段  $BC, AA_1, A_1C_1$  的中点, 且  $BC \perp A_1D$ .
- (1) 证明: 平面  $ACC_1A_1 \perp$  平面  $ABC$ ;
- (2) 若  $AB = 1$ , 求三棱锥  $A_1 - DEF$  的体积.



20. (12分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  上点  $P(1, \frac{3}{2})$  与圆  $x^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = 1$  上点  $M$  的距离的最大值为  $\sqrt{a} + 1$ .
- (1) 求椭圆  $C$  的方程;
- (2) 动直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 且以  $AB$  为直径的圆过点  $Q(0, \sqrt{3})$  ( $Q$  与  $A, B$  不重合), 证明: 动直线  $l$  过定点, 并求出该定点坐标.



21 (12分). 已知函数  $f(x) = ax \ln x - 2x$ ,  $a \in R$ .

- (1) 讨论  $f(x)$  的单调性;
- (2) 证明: 当  $a = 1$  时,  $f(x) + f(e^x) + 2e > 0$ .

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22.[选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $A(-2, 0)$ ,  $B(1, 0)$ , 动点  $P(x, y)$  满足  $|PA| = 2|PB|$ , 动点  $P$  的轨迹为曲线  $C$ .

- (1) 写出曲线  $C$  的一个参数方程;
- (2) 求  $|PA| \cdot |PB|$  的取值范围.

23.[选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知函数  $f(x) = |x^2 - 3a^2 - 3| + |x^2 - a - 1|$ ,  $a \in R$ .

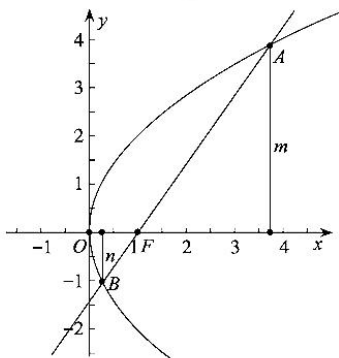
- (1) 当  $a = 0$  时, 解不等式  $f(x) \leq 4$ ;
- (2) 若  $f(x) \geq 2$ , 求  $a$  的取值范围.



## 2023届12月质量监测考试

### 文科数学参考答案

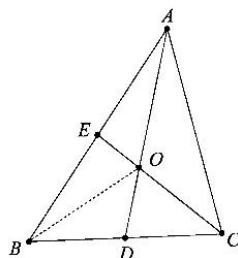
1. B 解析: 因为集合  $A = \{x | |x - 1| < 1\} = (0, 2)$ ,  $B = \{x | x^2 + x \geq 0\} = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$ ,  
 $A \cap B = (0, 2)$ ,  $(C_U A) \cup (C_U B) = C_U(A \cap B) = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ .
2. A 解析: 因为  $z \cdot (3 + 2i) = -1 + 3i$ , 所以  $z = \frac{-1 + 3i}{3 + 2i} = \frac{(-1 + 3i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{3}{13} + \frac{11}{13}i$ , 则  $z$  的虚部为  $\frac{11}{13}$ .
3. C 解析: 如图, 2020年的货物进出口总额为  $142936 + 179279 = 322215$  亿元, 故选项 A 正确; 2020年的货物进出口顺差为  $179279 - 142936 = 36343$  亿元, 故选项 B 正确; 2020年的货物进口总额为  $142936$  亿元, 相对于2019的货物进口总额  $143254$  亿元下降了, 故选项 C 错误; 2017—2021年, 货物出口总额逐年上升, 故选项 D 正确.
4. C 解析: 由  $PH = -\lg[H^+] = -\lg(6 \times 10^{-8}) = 8 - \lg 6 \approx 8 - 0.78 = 7.22$ .
5. A 解析: 因为直线  $l: \sqrt{2}x - y - \sqrt{2} = 0$  过抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦点  $F(1, 0)$ , 且与  $C$  交于  $A, B$  两点, 设直线  $l$  的倾斜角为  $\theta$ , 则  $\tan \theta = \sqrt{2}$ , 所以  $|AF| = \frac{2}{1 - \cos \theta}$ ,  $|BF| = \frac{2}{1 + \cos \theta}$ , 则  $m = |AF| \sin \theta = \frac{2 \sin \theta}{1 - \cos \theta}$ ,  $n = |BF| \sin \theta = \frac{2 \sin \theta}{1 + \cos \theta}$ ,  
 所以,  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1 - \cos \theta}{2 \sin \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .



6. B 解析: 因为单位向量  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  的夹角为  $\theta$ , 且向量  $2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$  与  $\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$  的夹角为  $120^\circ$ ,  
 所以  $\cos 120^\circ = \frac{(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2)}{\|2\vec{e}_1 + \vec{e}_2\| \|\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2\|} = \frac{-1 - 5 \cos \theta}{\sqrt{5 + 4 \cos \theta} \sqrt{10 - 6 \cos \theta}} = -\frac{1}{2}$ ,  $62 \cos^2 \theta + 15 \cos \theta - 23 = 0$ ,  $(2 \cos \theta - 1)(31 \cos \theta + 23) = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}$  或  $\cos \theta = -\frac{23}{31}$ , 又因为  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ .
7. C 解析: 如图, 连接  $BO$ ,  $\because a = 3, b = 4, c = \sqrt{13}$ ,  $\therefore \cos \angle ACB = \frac{3^2 + 4^2 - \sqrt{13}^2}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle ACB = \frac{\pi}{3}$ .

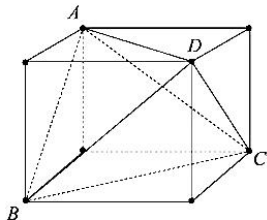
因为点  $D, E$  分别是边  $BC, BA$  的中点, 且  $AD, CE$  交于点  $O$ , 所以  $O$  为  $\triangle ABC$  的重心, 则  $\frac{OE}{CE} = \frac{1}{3}$ , 则  $\frac{S_{\triangle MOB}}{S_{\triangle ACB}} = \frac{1}{3}$ , 又因为  $\frac{S_{\triangle MOB}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{1}{2}$ , 所以  $S_{\triangle MOB} = \frac{1}{6} S_{\triangle ACB}$ , 同理,  $S_{\triangle DOB} = \frac{1}{6} S_{\triangle ACB}$ ,

则  $S_{BDOE} = \frac{1}{6} S_{\triangle ACB} + \frac{1}{6} S_{\triangle ACB} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACB} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ , 即四边形  $BDOE$  的面积为  $\sqrt{3}$ .



8. B 解析: 由题意得该四面体  $ABCD$  的直观图如图所示, 图中长方体的棱长分别为  $2, 1, \sqrt{3}$ ,

则  $AD = BC = \sqrt{5}$ ,  $AB = CD = 2$ ,  $AC = BD = \sqrt{7}$ , 四面体  $ABCD$  的四个面的面积均相等, 每一个面的面积为  $\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 2 \times \sqrt{1 - (\frac{5+4-7}{2 \times \sqrt{5} \times 2})^2} = \frac{\sqrt{19}}{2}$ , 则四面体  $ABCD$  的表面积为  $4 \times \frac{\sqrt{19}}{2} = 2\sqrt{19}$ .



9. C 解析: 因为函数  $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ , ( $\omega > 0, -\pi < \varphi < 0$ ),  $f(0) = \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{6}$ ,

所以  $f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{6})$ ,  $f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{6}) = 0 \Rightarrow \omega x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\frac{2}{3}\pi + k\pi}{\omega}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

所以

$$\begin{cases} \frac{\frac{2}{3}\pi + 49\pi}{\omega} \leq 100\pi \\ \frac{\frac{2}{3}\pi + 50\pi}{\omega} > 100\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega \geq \frac{149}{300} \\ \omega < \frac{38}{75} \end{cases} \Rightarrow \frac{149}{300} \leq \omega < \frac{38}{75}, \text{ 所以 } \omega \text{ 的取值范围是 } [\frac{149}{300}, \frac{38}{75}), \text{ 故选 C.}$$

10. C 解析: 因为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = n^2 - 20n + 29$ ,  $n = 1$  时,  $a_1 = S_1 = 10$ ,

当  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - 20n + 29 - [(n-1)^2 - 20(n-1) + 29] = 2n - 21$ ,

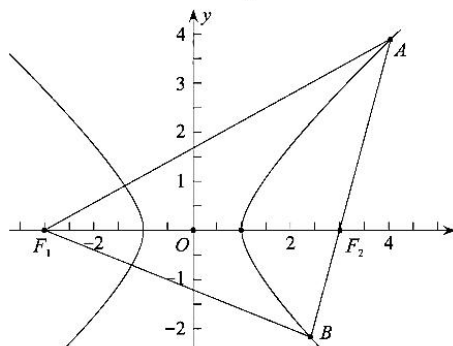
所以  $a_n = \begin{cases} 10, & n = 1 \\ 2n - 21, & n \geq 2 \end{cases}$ , 则  $a_1 = 10 > 0$ , 当  $2 \leq n \leq 10$  时,  $a_n = 2n - 21 < 0$ , 当  $n \geq 11$  时,

$a_n = 2n - 21 > 0$ , 所以数列  $\{|a_n|\}$  的前 50 项和为

$$T_{50} = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{50}| = a_1 - (a_2 + a_3 + \dots + a_{10}) + (a_{11} + a_{12} + \dots + a_{50}) = 10 - \frac{9 \times (-17 - 1) + 40 \times (1 + 79)}{2}, \text{ 所以 } T_{50} = 1691, \text{ 故选 D.}$$

11. A 解析: 设  $|BF_2| = t$ , 因为  $\overrightarrow{AF_2} = 2\overrightarrow{F_2B}$ , 所以  $|AF_2| = 2t$ , 由  $|BF_1| - |BF_2| = 2a \Rightarrow |BF_1| = t + 2a$ , 由  $|AF_1| - |AF_2| = 2a \Rightarrow |AF_1| = 2t + 2a$ . 设  $|F_1F_2| = 2c$ ,  $c^2 = a^2 + b^2$ , 因为  $\angle ABF_1 = 60^\circ$ , 在  $\triangle BF_1F_2$  中,  $\cos \angle F_1BF_2 = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{(t+2a)^2 + t^2 - (2c)^2}{2 \times (t+2a) \times t} \Rightarrow t^2 + 2at + 4a^2 - 4c^2 = 0 \textcircled{1}$ ; 在  $\triangle BF_1A$  中,  $\cos \angle F_1BA = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{(t+2a)^2 + (3t)^2 - (2t+2a)^2}{2 \times (t+2a) \times 3t} \Rightarrow 3t^2 - 10at = 0 \Rightarrow t = \frac{10}{3}a$ ,

代入①式得  $e = \frac{c}{a} = \frac{7}{3}$ , 则双曲线  $C$  的离心率为  $\frac{7}{3}$  故选 A.

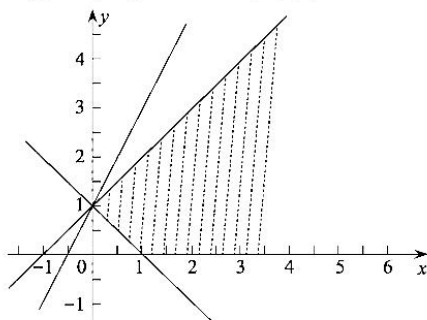


12. B 解析: 因为  $a = \log_6 4 < 1$ ,  $b = \log_9 5 < 1$ ,  $c = \log_3 \pi > 1 \Rightarrow a < c$ ,  $b < c$ ;

$4a = 4 \log_6 4 = \log_6 4^4 > \log_6 6^3 = 3$ ,  $4b = 4 \log_9 5 = \log_9 5^4 < \log_9 9^3 = 3$ , 所以  $b < a$ .

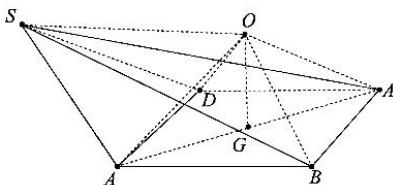
综上,  $b < a < c$ , 故选 B.

13. 1 解析: 如图所示,  $x, y$  满足的平面区域如图中阴影所示, 令  $z = y - 2x$ , 即直线  $y = 2x + z$  经过点  $(0, 1)$  时,  $z$  最大, 且  $z_{\max} = 1$ , 即  $y - 2x$  的最大值为 1.



14.  $\frac{3}{5}$  解析: 设男生为  $A, B, C$ , 女生为  $a, b$ , 则从中选 3 人的所有情况为:  $(A, B, C)$ ,  $(A, B, a)$ ,  $(A, B, b)$ ,  $(A, C, a)$ ,  $(A, C, b)$ ,  $(A, a, b)$ ,  $(B, C, a)$ ,  $(B, C, b)$ ,  $(B, a, b)$ ,  $(C, a, b)$ , 共 10 种情况; 这 3 人中恰有 2 个男生的所有情况为:  $(A, B, a)$ ,  $(A, B, b)$ ,  $(A, C, a)$ ,  $(A, C, b)$ ,  $(B, C, a)$ ,  $(B, C, b)$ , 共 6 种情况. 所以这 3 人中恰有 2 个男生的概率为  $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ .

15.  $18\pi$  解析: 如图, 四棱锥  $S-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为矩形, 平面  $SAC \perp$  平面  $ABCD$ , 所以四棱锥  $S-ABCD$  外接球的球心是  $\triangle ABC$  外接圆的圆心  $O$ , 因为  $\cos \angle SAC = -\frac{1}{3}$ , 所以  $\sin \angle SAC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ , 则  $\frac{SC}{\sin \angle SAC} = \frac{4}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 2R \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ , 所以  $S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 18\pi$ .





16. ②③ 解析: 因为  $f(x) = 3 \cos x - \frac{2}{\cos x}$ ,  $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ , 所以  $f(x)$  的定义域是  $\{x | x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$  故①错误;  $f(-x) = 3 \cos(-x) - \frac{2}{\cos(-x)} = 3 \cos x - \frac{2}{\cos x} = f(x)$ ,  $f(x)$  图象关于  $y$  轴对称, 故②正确;

$$f(2k\pi + \pi - x) = 3 \cos(2k\pi + \pi - x) - \frac{2}{\cos(2k\pi + \pi - x)} = -3 \cos x + \frac{2}{\cos x} = -f(x),$$

$f(x)$  的图象关于点  $(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  对称, 故③正确; 令  $t = \cos x$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  和  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上单调递减,  $y = 3t - \frac{2}{t}$  单调递增, 所以  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  和  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上均是单调递减, 故④错误; 则所有真命题的序号是②③.

17. (12分) 解: (1) 因为  $2a_{n+1} = 3a_n + 4$ , 所以  $2(a_{n+1} + 4) = 3a_n + 12 = 3(a_n + 4)$ , 即  $a_{n+1} + 4 = \frac{3}{2}(a_n + 4)$ , 又因为  $a_1 = -3$ , 则  $a_1 + 4 = 1 \neq 0$ ,  $\frac{a_{n+1} + 4}{a_n + 4} = \frac{3}{2}$ , 所以数列  $\{a_n + 4\}$  为等比数列;  
..... 4分

(2) 由 (1) 得  $a_n + 4 = (a_1 + 4) \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ , 则  $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 4$ ,

所以  $S_n = \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n}{1 - \frac{3}{2}} - 4n = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n - 2 - 4n$ , ..... 6分

当  $n \geq 2$  时,  $S_n - S_{n-1} = \left[2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n - 2 - 4n\right] - \left[2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 2 - 4(n-1)\right] = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 4$ ,  
..... 8分

所以当  $n \geq 5$  且  $n \in \mathbb{N}^*$  时,  $S_n - S_{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 4 > 0$ , 即  $S_n > S_{n-1}$ , 则  $S_4 < S_5 < S_6 < \dots$ ;

当  $2 \leq n \leq 4$  且  $n \in \mathbb{N}^*$  时,  $S_n - S_{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 4 < 0$ , 即  $S_n < S_{n-1}$ , 则  $S_4 < S_3 < S_2 < S_1$ .

综上,  $(S_n)_{\min} = S_4 = -\frac{63}{8}$ , 即  $S_n$  的最小值为  $-\frac{63}{8}$ . ..... 12分

18. (12分) 解: (1) 因为该中学冬奥知识竞赛成绩的中位数的估计值为 82 分, 所以  $\begin{cases} 6 + 4 + a + b + 18 = 100 \\ 6 + 4 + a + b \times \frac{82 - 80}{10} = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 32 \\ b = 40 \end{cases}$ , 则  $a, b$  的值分别为 32 和 40; ..... 6分

(2) 该中学冬奥知识竞赛成绩的平均数为:  
 $\bar{x} = \frac{6 \times 55 + 4 \times 65 + 32 \times 75 + 40 \times 85 + 18 \times 95}{100} = 81$ ; ..... 9分

该中学冬奥知识竞赛成绩的标准差为:  
 $S = \sqrt{\frac{1}{100} [6 \times (55 - 81)^2 + 4 \times (65 - 81)^2 + 32 \times (75 - 81)^2 + 40 \times (85 - 81)^2 + 18 \times (95 - 81)^2]}$   
所以  $S = \sqrt{104} = 2\sqrt{26} \approx 2 \times 5.1 = 10.2$ .

该中学冬奥知识竞赛成绩的平均数与标准差的估计值分别为 81 和 10.2. .... 12分

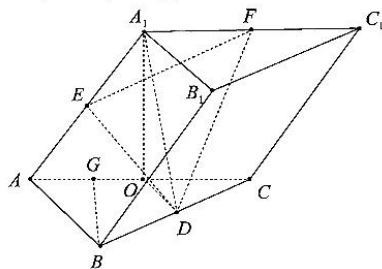
19. (12分) 解: (1) 如图, 取  $AC$  的中点  $O$ , 连接  $OD, OA_1$ , 因为  $AA_1 = AC = 2, \angle A_1AC = 60^\circ$ , 所以  $\triangle A_1AC$  为等边三角形, 所以  $A_1O \perp AC$ . 又因为  $\angle ABC = 90^\circ$ , 点  $O, D$  分别为线段  $AC, BC$  的中点, 所以  $OD \parallel AB$ , 所以  $OD \perp BC$ , 又因为  $BC \perp A_1D, OD \cap A_1D = D$ , 所以  $BC \perp$  平面  $A_1OD$ , 则  $BC \perp A_1O$ , 又因为  $AC \cap BC = C$ , 所以  $A_1O \perp$  平面  $ABC$ , 又因为  $A_1O \subset$  平面  $ACC_1A_1$ , 所以平面  $ACC_1A_1 \perp$  平面  $ABC$ . ..... 5分

(2) 如图, 过  $B$  作  $BG \perp AC$  于点  $G$ , 由 (1) 得平面  $ACC_1A_1 \perp$  平面  $ABC$ , 且平面  $ACC_1A_1 \cap$  平面  $ABC = AC$ , 所以  $BG \perp$  平面  $ACC_1A_1$ , 在直角  $ABC$  中,

$AC = 2, AB = 1, \angle ABC = 90^\circ$ , 所以  $BC = \sqrt{3}$ , 由  $AB \cdot BC = AC \cdot BG \Rightarrow BG = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

又因为点  $D$  为线段  $BC$  的中点, 所以点  $D$  到平面  $ACC_1A_1$  的距离  $h$  为点  $B$  到平面  $ACC_1A_1$  的距离  $BG$  的一半, 即  $h = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ . 因为点  $E, F$  分别为线段  $AA_1, A_1C_1$  的中点, 所以  $A_1E = A_1F = 1$ , 又因为  $\angle EA_1F = 120^\circ$ , 所以  $\triangle EA_1F$  的面积为  $S_{\triangle EA_1F} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ,  $V_{A_1-DEF} =$

$V_{D-A_1EF} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle EA_1F} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{16}$ , 所以三棱锥  $A_1-DEF$  的体积为  $\frac{1}{16}$ . ..... 12分



20. (12分) 解: (1) 因为椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  过点  $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ , 所以  $\frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1$ , 点

$P\left(1, \frac{3}{2}\right)$  与圆  $x^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 1$  上点  $M$  的距离的最大值为  $\sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right)^2} + 1 = \sqrt{2} + 1 = \sqrt{a} + 1$ , 解得  $a = 2, b = \sqrt{3}$ , 则椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ . ..... 4分

(2) 当直线  $l$  斜率存在时, 设直线  $l: y = kx + m$ ,

$$\begin{cases} y = kx + m \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow (3 + 4k^2)x^2 + 8kmx + (4m^2 - 12) = 0,$$

设点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-8km}{3 + 4k^2} \\ x_1x_2 = \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2} \end{cases}$ , ..... 6分

$$\begin{aligned} \vec{QA} \cdot \vec{QB} &= (x_1, y_1 - \sqrt{3}) \cdot (x_2, y_2 - \sqrt{3}) = x_1x_2 + (y_1 - \sqrt{3})(y_2 - \sqrt{3}) \\ &= x_1x_2 + (kx_1 + m - \sqrt{3})(kx_2 + m - \sqrt{3}) = (1 + k^2)x_1x_2 + (km - \sqrt{3}k)(x_1 + x_2) + (m - \sqrt{3})^2 \\ &= (1 + k^2) \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2} + (km - \sqrt{3}k) \frac{-8km}{3 + 4k^2} + (m - \sqrt{3})^2 = 0 \end{aligned}$$
 ..... 8分

所以  $7m^2 - 6\sqrt{3}m - 3 = 0 \Rightarrow m = \sqrt{3}$  或  $m = -\frac{\sqrt{3}}{7}$ .

则直线  $l: y = kx + \sqrt{3}$  或  $l: y = kx - \frac{\sqrt{3}}{7}$ , 因为  $Q$  与  $A, B$  不重合, 所以直线  $l: y = kx - \frac{\sqrt{3}}{7}$ , 即直线过定点  $\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{7}\right)$ . ..... 10分

当直线  $l$  斜率不存在时, 设直线  $l: x = t$ , 不妨设  $A\left(t, \sqrt{3 - \frac{3}{4}t^2}\right), B\left(t, -\sqrt{3 - \frac{3}{4}t^2}\right)$ ,

所以  $\vec{QA} \cdot \vec{QB} = \left(t, \sqrt{3 - \frac{3}{4}t^2} - \sqrt{3}\right) \cdot \left(t, -\sqrt{3 - \frac{3}{4}t^2} - \sqrt{3}\right) = t^2 + 3 - (3 - \frac{3}{4}t^2) = \frac{7}{4}t^2 = 0$ .

- 所以  $t=0$ , 直线  $l: x=0$ , 因为  $Q$  与  $A, B$  不重合, 所以不满足题意.
- 综上, 直线  $l$  过定点  $\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{7}\right)$ . ..... 12分
21. (12分) 解: (1)  $f'(x) = a(\ln x + 1) - 2 = a \ln x + a - 2$ ,  
 当  $a=0$  时,  $f'(x) = -2 < 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减; ..... 1分  
 当  $a > 0$  时,  $f'(x) = a \ln x + a - 2 > 0 \Rightarrow x > e^{\frac{2-a}{a}}$ ,  
 $f'(x) = a \ln x + a - 2 < 0 \Rightarrow 0 < x < e^{\frac{2-a}{a}}$ , 则  $f(x)$  在  $\left(0, e^{\frac{2-a}{a}}\right)$  上单调递减, 则  $f(x)$  在  $\left(e^{\frac{2-a}{a}}, +\infty\right)$  上单调递增; ..... 3分  
 当  $a < 0$  时,  $f'(x) = a \ln x + a - 2 > 0 \Rightarrow 0 < x < e^{\frac{2-a}{a}}$ ,  
 $f'(x) = a \ln x + a - 2 < 0 \Rightarrow x > e^{\frac{2-a}{a}}$ , 则  $f(x)$  在  $(0, e^{\frac{2-a}{a}})$  上单调递增, 则  $f(x)$  在  $\left(e^{\frac{2-a}{a}}, +\infty\right)$  上单调递减. .... 5分  
 综上, 当  $a=0$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减;  
 当  $a > 0$  时,  $f(x)$  在  $\left(0, e^{\frac{2-a}{a}}\right)$  上单调递减, 在  $\left(e^{\frac{2-a}{a}}, +\infty\right)$  上单调递增;  
 当  $a < 0$  时,  $f(x)$  在  $\left(0, e^{\frac{2-a}{a}}\right)$  上单调递增, 在  $\left(e^{\frac{2-a}{a}}, +\infty\right)$  上单调递减. .... 6分  
 (2) 当  $a=1$  时,  $f(x) = x \ln x - 2x$ ,  $f(e^x) = e^x \ln e^x - 2e^x = (x-2)e^x$ ,  
 要证  $f(x) + f(e^x) + 2e > 0$ , 即证  $f(x) > -f(e^x) - 2e$ ,  
 令  $g(x) = -f(e^x) - 2e - (2-x)e^x - 2e$ , 也就是要证明  $f(x) > g(x)$ . .... 8分  
 由 (1) 得  $f(x)$  在  $(0, e)$  上单调递减, 则  $f(x)$  在  $(e, +\infty)$  上单调递增, 所以  $f(x) \geq f(e) = -e$ ;  
 $g'(x) = (1-x)e^x$ , 所以  $g(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增, 则  $g(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 所以  
 $g(x) \leq g(1) = -e$ ; 则  $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\max}$ , 又因为  $f(x)$  在  $x=e$  处取得最小值, 而  $g(x)$  在  $x=1$  处取得最小值, 所以  $f(x) > g(x)$ , 综上,  $f(x) + f(e^x) + 2e > 0$ . .... 12分
22. [选修4-4: 坐标系与参数方程] (10分)  
 解: (1) 因为  $A(-2, 0)$ ,  $B(1, 0)$ , 动点  $P(x, y)$  满足  $|PA| = 2|PB|$ ,  
 所以  $\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ , 整理得曲线  $C$  的方程为  $(x-2)^2 + y^2 = 4$ , 则曲线  $C$  的一个参数方程为  $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数); ..... 5分  
 (2) 因为  $|PA| = 2|PB|$ , 所以  $|PA| \cdot |PB| = \frac{1}{2}|PA|^2 = \frac{1}{2}[(2+2\cos\theta+2)^2 + (2\sin\theta)^2]$ ,  
 则  $|PA| \cdot |PB| = \frac{1}{2}|PA|^2 = \frac{1}{2}(20 + 16\cos\theta) = 10 + 8\cos\theta \in [2, 18]$ ,  
 所以  $|PA| \cdot |PB|$  的取值范围为  $[2, 18]$ . .... 10分
23. [选修4-5: 不等式选讲] (10分)  
 解: (1) 当  $a=0$  时, 不等式  $f(x) \leq 4$  化简为  $|x^2-3| + |x^2-1| \leq 4$ , 令  $t = x^2 \in [0, +\infty)$ ,  
 则  $|t-3| + |t-1| \leq 4$ , 当  $0 \leq t \leq 1$  时,  $4-2t \leq 4 \Rightarrow t \geq 0$ , 则  $0 \leq t \leq 1$ ;  
 当  $1 < t < 3$  时,  $2 \leq 4$  恒成立, 则  $1 < t < 3$ ;  
 当  $t \geq 3$  时,  $2t-4 \leq 4 \Rightarrow t \leq 4$  恒成立, 则  $3 \leq t \leq 4$ .  
 综上,  $0 \leq t \leq 4$ , 即  $0 \leq x^2 \leq 4$ , 解得  $-2 \leq x \leq 2$ , 所以解集为  $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$ . .... 5分  
 (2)  $f(x) = |x^2 - 3a^2 - 3| + |x^2 - a - 1| \geq 2$  恒成立,  
 因为  $f(x) = |x^2 - 3a^2 - 3| + |x^2 - a - 1| = |3a^2 + 3 - x^2| + |x^2 - a - 1| \geq |3a^2 - a + 2| = 3a^2 - a + 2$ .  
 即  $3a^2 - a + 2 \geq 2$ , 解得  $a \leq 0$  或  $a \geq \frac{1}{3}$ . .... 10分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

