参考答案

1. C **2.** D **3.** A **4.** D **5.** B **6.** C **7.** A **8.** B **9.** AB **10.** AC **11.** BCD **12.** ACD

13. $f(x)=3\cos\frac{\pi}{2}x+1$(答案不唯一) **14.** 2

15. $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 或 $(x-10)^2+(y+5)^2=100$ **16.** 172π

17. 解:(1)$\because (a+c)(\sin A-\sin C)=(a-b)\sin B$,

$\therefore$ 由正弦定理,得 $(a+c)(a-c)=(a-b)b$,即 $a^2+b^2-c^2=ab$, ······ 2 分

由余弦定理,得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$. ······ 4 分

又 $C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\therefore C=\frac{\pi}{3}$. ······ 5 分

(2)由(1)知,$C=\frac{\pi}{3}$.

由余弦定理,得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$, ······ 6 分

$\therefore 12=a^2+b^2-ab\geqslant ab$,$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C\leqslant 3\sqrt{3}$, ······ 8 分

当且仅当 $a=b=2\sqrt{3}$,即$\triangle ABC$ 为等边三角形时,等号成立, ······ 9 分

$\therefore \triangle ABC$ 的面积的最大值为 $3\sqrt{3}$. ······ 10 分

18. (1)解:由题意得 $a_n\cdot S_{n+1}=(a_n+2)\cdot S_n$,所以 $a_n\cdot S_{n+1}=a_n\cdot S_n+2S_n$,

所以 $a_n\cdot(S_{n+1}-S_n)=2S_n$,所以 $a_n\cdot a_{n+1}=2S_n$,① ······ 1 分

因此 $a_{n+1}\cdot a_{n+2}=2S_{n+1}$.② ······ 2 分

由②-①,得 $a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=2a_{n+1}$,即 $a_{n+1}(a_{n+2}-a_n-2)=0$,

因此 $a_{n+1}=0$ 或 $a_{n+2}-a_n-2=0$. ······ 3 分

因为 $a_n\neq 0$,所以 $a_{n+1}\neq 0$,所以 $a_{n+2}-a_n=2$,

所以数列$\{a_n\}$的奇偶项分别成等差数列,且公差为 2. ······ 4 分

又因为 $a_1=1$,$a_1\cdot a_2=2S_1=2a_1$,得 $a_2=2$, ······ 5 分

所以 $a_{2n-1}=a_1+(n-1)\cdot 2=2n-1$,$a_{2n}=a_2+(n-1)\cdot 2=2n$.

所以 $a_n=n$. ······ 6 分

(2)证明:由(1)知 $b_1+2^2b_2+3^2b_3+\cdots+n^2\cdot b_n=a_n=n$,

可得 $b_1+2^2b_2+3^2b_3+\cdots+(n-1)^2\cdot b_{n-1}=a_{n-1}=n-1$,

两式相减,得 $n^2\cdot b_n=n-(n-1)$,即 $b_n=\frac{1}{n^2}(n\geqslant 2)$. ······ 8 分

又 $b_1=a_1=1$,所以 $b_n=\frac{1}{n^2}$. ······ 9 分

又$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$, ······ 10 分

所以 $T_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\times2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}=1+1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2$,

所以 $T_n<2$. …… 12 分

19. 解:(1)因为 $AB=AD=2\sqrt{3}$,$BC=DC=\frac{1}{2}AC=2$,

所以 $AC^2=AB^2+BC^2=AD^2+DC^2$,

所以 $AB\perp BC$,$AD\perp DC$,且 $\angle BAC=\angle DAC=30°$,

所以 $\triangle ABD$ 是等边三角形. …… 1 分

如图,取 AD 的中点 N,连接 BN,MN,所以 $BN\perp AD$.

又 $AD\perp DC$,则 $BN/\!/CD$.

又因为 $BN\not\subset$ 平面 PCD,$CD\subset$ 平面 PCD,

所以 $BN/\!/$ 平面 PCD. …… 2 分

又因为 $BM/\!/$ 平面 PCD,$BM\cap BN=B$,

所以平面 $BMN/\!/$ 平面 PCD. …… 3 分

因为平面 $PAD\cap$ 平面 $PCD=PD$,平面 $PAD\cap$ 平面 $BMN=MN$,

所以 $MN/\!/PD$,所以 M 是棱 AP 的中点,即 $\frac{AM}{AP}=\frac{1}{2}$. …… 4 分

(2)如图,延长 DC,AB,交于点 E,连接 PE,则直线 PE 为直线 l,

过点 P 作 $PO\perp AC$,交 AC 于点 O,连接 OB,OD.

因为平面 $PAC\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $PAC\cap$ 平面 $ABCD=AC$,$PO\subset$ 平面 PAC,

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$. …… 5 分

又 $\angle ACP=60°$,$PC=2$,$AC=4$,

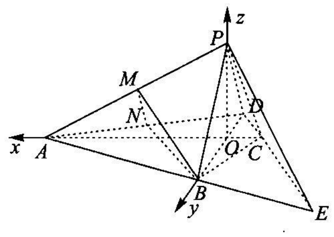
所以 $\triangle APC$ 是直角三角形,且 $\angle APC=90°$,

所以 $PO=\sqrt{3}$,$AO=3$,$CO=1$.

又 $\triangle APC\cong\triangle ABC$,所以 $BO\perp AC$,且 $BO=PO=\sqrt{3}$.

以 O 为坐标原点,$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向,

建立如图所示的空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$. …… 7 分



第 19 题图

则 $A(3,0,0)$,$B(0,\sqrt{3},0)$,$C(-1,0,0)$,$D(0,-\sqrt{3},0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,$E(-3,2\sqrt{3},0)$,

$\overrightarrow{PE}=(-3,2\sqrt{3},-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{DA}=(3,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{PA}=(3,0,-\sqrt{3})$. …… 8 分

设平面 PAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}=3x+\sqrt{3}y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=3x-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

令 $x=1$,得 $y=-\sqrt{3}$,$z=\sqrt{3}$,所以 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$. …… 10 分

设直线 PE 与平面 PAD 所成的角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PE}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PE}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{PE}|}=\frac{12}{\sqrt{7}\times2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$,

即直线 l 与平面 PAD 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$. …… 12 分

20. 解：(1)由频率分布直方图可知，$0.02\times(4+15+20+m)=1$，

解得 $m=11$，…… 1分

估计这批产品每件内径的平均值为

$\overline{x}=1.13\times4\times0.02+1.15\times15\times0.02+1.17\times20\times0.02+1.19\times11\times0.02=1.165\ 2$. …… 3分

(2)由题意可知 $\mu=1.165\ 2,\sigma=0.01$，

所以 $\mu-2\sigma=1.145\ 2,\mu+\sigma=1.175\ 2$，…… 4分

所以 $P(1.145\ 2<X<1.175\ 2)=P(\mu-2\sigma<X<\mu+\sigma)$

$=\frac{1}{2}[P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)+P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)]\approx0.818\ 6$，…… 6分

所以 1 500 箱产品中内径位于(1.145 2,1.175 2)内产品的件数的估计值为

$1\ 500\times0.818\ 6\times20=245\ 58$. …… 7分

(3)在这批产品中随机抽取一件，内径位于[1.14,1.18)的频率为$(15+20)\times0.02=0.7$，

因此随机打开一箱，再从中随机抽取一件，这件产品为优质品的概率为 $P=0.7$. …… 8分

依题意，ξ 的所有可能取值为 $0,1,2,3,\cdots,20$，且 $\xi\sim B(20,0.7)$，…… 10分

所以 ξ 的数学期望为 $E(\xi)=20\times0.7=14$. …… 12分

21. (1)解：因为当 DP 与 x 轴垂直时，$|PF|=\frac{5}{4}$，

所以 $1+\frac{p}{2}=\frac{5}{4}$，解得 $p=\frac{1}{2}$，所以 $C:y^2=x$. …… 2分

(2)①证明：设 $P(x_0,y_0)$，则 $y_0=\sqrt{x_0}$，

由 $y^2=x$，得当 $y>0$ 时，$y=\sqrt{x},y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，…… 3分

所以直线 PM 的斜率为$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$，所以直线 $PM:y-y_0=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)$，

即 $PM:y=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x-\frac{\sqrt{x_0}}{2}+y_0=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x+\frac{\sqrt{x_0}}{2}$，所以 $M\left(0,\frac{\sqrt{x_0}}{2}\right)$. …… 4分

又因为 $k_1=\frac{-1}{k_{PM}},k_{PM}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$，所以 $k_1=-2\sqrt{x_0}$.

将直线 PD 的方程 $y=\frac{\sqrt{x_0}}{x_0-1}(x-1)$ 与 $y^2=x$ 联立并化简，得 $y^2-\frac{x_0-1}{\sqrt{x_0}}y-1=0$，

设 $Q(x_Q,y_Q)$，则 $y_0y_Q=-1$，

所以 $y_Q=-\frac{1}{y_0}=-\frac{1}{\sqrt{x_0}}$. …… 6分

把点 Q 的坐标代入 $y=\frac{\sqrt{x_0}}{x_0-1}(x-1)$，得 $x_Q=\frac{1}{x_0}$，

所以 $k_2=\frac{y_Q}{x_Q}=-\sqrt{x_0}$.

所以$\frac{k_1}{k_2}=2$,为定值. …………………………………………………………………… 7 分

②解:由①得$|y_Q-y_0|=\sqrt{x_0}-\left(-\frac{1}{\sqrt{x_0}}\right)=\frac{x_0+1}{\sqrt{x_0}}$,直线$AB$:$y-\frac{\sqrt{x_0}}{2}=-2\sqrt{x_0}x$. ………………… 8 分

将$y-\frac{\sqrt{x_0}}{2}=-2\sqrt{x_0}x$与$y^2=x$联立并化简,得$y^2+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}y-\frac{1}{4}=0$,

则$y_A+y_B=-\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$,$y_Ay_B=-\frac{1}{4}$,

所以$|y_A-y_B|=\sqrt{(y_A+y_B)^2-4y_Ay_B}=\sqrt{\frac{1}{4x_0}+1}$. …………………………………………… 9 分

在直线AB的方程$y-\frac{\sqrt{x_0}}{2}=-2\sqrt{x_0}x$中,令$y=0$,得$x=\frac{1}{4}$,

设直线AB与x轴的交点为N,则N的坐标为$\left(\frac{1}{4},0\right)$. …………………………………………… 10 分

因为$|OD|=1$,所以$|ND|=\frac{3}{4}$,

则$\frac{S_{\triangle OPQ}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{\frac{1}{2}|OD||y_Q-y_0|}{\frac{1}{2}|ND||y_A-y_B|}=\frac{\frac{x_0+1}{2\sqrt{x_0}}}{\frac{3}{8}\sqrt{\frac{1}{4x_0}+1}}=\frac{8(x_0+1)}{3\sqrt{1+4x_0}}=\frac{2}{3}\left[\frac{(1+4x_0)+3}{\sqrt{1+4x_0}}\right]$ ………………… 11 分

$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+4x_0}+\frac{3}{\sqrt{1+4x_0}}\right)$

$\geqslant\frac{4}{3}\sqrt{\sqrt{1+4x_0}\cdot\frac{3}{\sqrt{1+4x_0}}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$,

当且仅当$\sqrt{1+4x_0}=\frac{3}{\sqrt{1+4x_0}}$,即$x_0=\frac{1}{2}$时等号成立,

所以$\frac{S_{\triangle OPQ}}{S_{\triangle ABD}}$的最小值为$\frac{4}{3}\sqrt{3}$. …………………………………………………………… 12 分

22. 解:(1)由于$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}+\frac{8e^2}{x}$,故$f'(1)=11e^2$. ……………………………………………… 2 分

又因为$f(1)=e^2+a$,

所以曲线$y=f(x)$在点$(1,e^2+a)$处的切线方程为$y=11e^2(x-1)+e^2+a$.

令$x=0,y=0$,则有$a=10e^2$. ………………………………………………………………… 4 分

(2)设点$P(x_0,y_0)$是函数$y=f(x)$图像上的任一点,

由于$f'(x_0)=e^{2x_0}+2x_0e^{2x_0}+\frac{8e^2}{x_0}$,$y_0=f(x_0)=x_0e^{2x_0}+8e^2\ln x_0+a$,

从而可知$y=f(x)$在点$P(x_0,y_0)$处的切线方程为$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

令$x=0,y=0$,得$f'(x_0)x_0=f(x_0)$,

即$x_0e^{2x_0}+2x_0^2e^{2x_0}+8e^2=x_0e^{2x_0}+8e^2\ln x_0+a$. ………………………………………… 6 分

从而有$a=2x_0^2e^{2x_0}-8e^2\ln x_0+8e^2$,

设$h(x_0)=2x_0^2e^{2x_0}-8e^2\ln x_0+8e^2(x_0>0)$,

于是问题可转化为求关于 x_0 的函数 $h(x_0)$ 的值域. ………………………………………… 7 分

$h'(x_0)=4x_0e^{2x_0}+4x_0^2e^{2x_0}-\dfrac{8e^2}{x_0}$,

并且有 $h''(x_0)=4e^{2x_0}+8x_0e^{2x_0}+8x_0e^{2x_0}+8x_0^2e^{2x_0}+\dfrac{8e^2}{x_0^2}=(4+16x_0+8x_0^2)e^{2x_0}+\dfrac{8e^2}{x_0^2}>0$,

所以 $h'(x_0)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………………… 9 分

又 $h'(1)=0$,当 $x_0\in(0,1)$ 时,$h'(x_0)<0$,

故 $h(x_0)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减;

当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$h'(x_0)>0$,

故 $h(x_0)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………………… 10 分

于是 $h(x_0)$ 在 $x_0=1$ 处取得最小值,最小值为 $h(1)=10e^2$. ………………………… 11 分

由于当 $x_0\to+\infty$ 时,$h(x_0)\to+\infty$,

因此 a 的取值范围为 $[10e^2,+\infty)$. ………………………………………… 12 分