杭州学军中学 2019 学年第一学期期中考试

高三数学试卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 设全集 $U=R$，集合 $M=\{x\mid x>1\},P=\{x\mid x^2>1\}$ 则下列关系中正确的是（　　）

A. $M=P$　　B. $M\cup P=M$　　C. $M\cap P=M$　　D. $(C_U M)\cap P=\varnothing$

2. 设纯虚数 z 满足 $\dfrac{1-i}{z}=1+ai$（其中 i 为虚数单位），则实数 a 等于（　　）

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

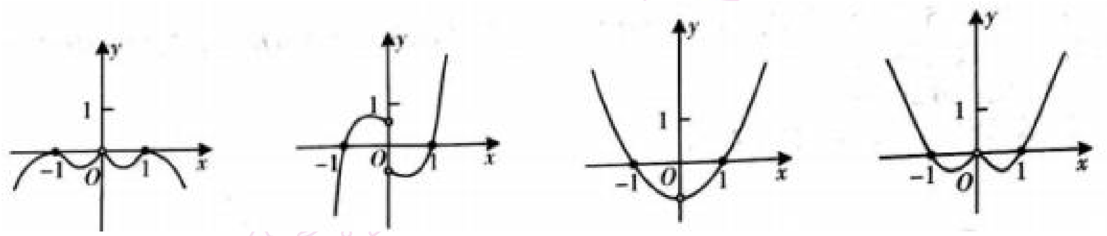
3. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x\geq 0 \\ x+y-3\geq 0 \\ x-2y\leq 0 \end{cases}$，则 $z=x+2y$ 的取值范围是（　　）

A. $[0,6]$　　B. $[0,4]$　　C. $[6,+\infty)$　　D. $[4,+\infty)$

4. 已知 $a,b\in R$，下列四个条件中，使 $a>b$ 成立的充分不必要的条件是（　　）

A. $a>b-1$　　B. $a>b+1$　　C. $|a|>|b|$　　D. $2^a>2^b$

5. 函数 $y=\dfrac{x^2\ln|x|}{|x|}$ 的图象大致是（　　）



A　　B　　C　　D

6. 已知函数 $D(x)=\begin{cases} 1 & x为有理数 \\ 0 & x为无理数 \end{cases}$，则（　　）

A. $D(D(x))=1$，0 是 $D(x)$ 的一个周期　　B. $D(D(x))=1$，1 是 $D(x)$ 的一个周期

C. $D(D(x))=0$, 1是 $D(x)$ 的一个周期　　D. $D(D(x))=0$, $D(x)$ 最小正周期不存在

7. 若关于 x 的不等式 $|x+t^2-2|+|x+t^2+2t-1|<3t$ 无解，则实数 t 的取值范围是（　　）

A. $\left[-\frac{1}{5},1\right]$　　B. $(-\infty,0]$　　C. $(-\infty,1]$　　D. $(-\infty,5]$

8. 若 O 是 ΔABC 垂心，$\angle A=\frac{\pi}{6}$ 且 $\sin B\cos C\overrightarrow{AB}+\sin C\cos B\overrightarrow{AC}=2m\sin B\sin C\overrightarrow{AO}$，则 $m=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

9. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx\ (|b|\le 2|a|)$，定义 $f_1(x)=\max\{f(t)|-1\le t\le x\le 1\}$，$f_2(x)=\min\{f(t)|-1\le t\le x\le 1\}$，其中 $\max\{a,b\}$ 表示 a,b 中的较大者，$\min\{a,b\}$ 表示 a,b 中的较小者，下列命题正确的是（　　）

A. 若 $f_1(-1)=f_1(1)$，则 $f(-1)>f(1)$　　B. 若 $f_2(-1)=f_2(1)$，则 $f(-1)>f(1)$

C. 若 $f_2(1)=f_1(-1)$，则 $f_1(-1)<f_1(1)$　　D. 若 $f_2(1)=f_1(-1)$，则 $f_2(-1)>f_2(1)$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=-\frac{1}{2}, a_{n+1}=a_n^{\ 2}+3a_n+1$，若 $b_n=\frac{1}{a_n+2}$，设数列 $\{b_n\}$ 的前项和为 S_n，则使得 $|S_{2019}-k|$ 最小的整数 k 的值为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

二、填空题（本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分.）

11. $(1-2x)^5$ 展开式中 x^3 的系数为________，所有项的系数和为________.

12. 等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\sqrt{2}, a_2=\sqrt[3]{3}$，则 $\frac{a_2+a_{2013}}{a_8+a_{2019}}=$________，$a_1a_2a_3a_4=$________.

13. 在 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $c\sin A=\sqrt{3}a\cos C$，则 $C=$________，若 $c=\sqrt{31}$，ΔABC 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，则 $a+b=$________.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+2^{-x}-2, x\geq 0\\ 2f(x+1), x<0\end{cases}$，则 $f(-\frac{3}{2})=$________，若函数 $g(x)=f(x)-k$ 有无穷多个零点，则 k 的取值范围是________.

15. 已知 $x,y\in R$ 且 $x^2+y^2+xy=1$，则 $x+y+xy$ 的最小值为________.

16. 已知平面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\left|\vec{c}\right|=1,\left|\vec{a}-\vec{c}\right|=\left|\vec{b}-\vec{c}\right|=5$，则 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ 的最大值为________.

17. 当 $x\in[1,4]$ 时，不等式 $0\leq ax^3+bx^2+4a\leq 4x^2$ 恒成立，则 $7a+b$ 的取值范围是________.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 74 分．写出文字说明、证明过程或演算步骤．）

18.（本题满分 14 分）已知函数 $f(x)=2\sin x\cos(x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调递减区间；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值及最小值.

19.（本题满分 15 分）已知在 ΔABC 中，$\left|AB\right|=1$，$\left|AC\right|=2$.

（Ⅰ）若 $\angle BAC$ 的平分线与边 BC 交于点 D，求 $\overrightarrow{AD}\cdot\left(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$；

（Ⅱ）若点 E 为 BC 的中点，求 $\dfrac{1}{|\overrightarrow{AE}|^2}+\dfrac{1}{|\overrightarrow{BC}|^2}$ 的最小值.

20.（本题满分 15 分）已知正项等差数列 $\{a_n\}$ 满足：$S_n{}^2=a_1{}^3+a_2{}^3+\cdots+a_n{}^3$，其中 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）令 $b_n=(-1)^{n-1}\dfrac{4n}{(2a_n-1)(2a_n+1)}$，证明：$b_1+b_2+\cdots+b_n\le\dfrac{2n+2}{2n+1}$.

21.（本题满分 15 分）设函数 $f(x)=e^x-ax+a,a\in R$，其图象与 x 轴交于 $A(x_1,0),B(x_2,0)$ 两点，且 $x_1<x_2$.

（Ⅰ）求 a 的取值范围；（Ⅱ）证明：$f'(\sqrt{x_1x_2})<0$.

22.（本题满分 15 分）已知函数 $f(x)=\ln x-ax^{2}-bx-2,a\in R$.

（Ⅰ）当 $b=2$ 时，试讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若对任意的 $b\in(-\infty,-\frac{3}{e})$，方程 $f(x)=0$ 恒有 2 个不等的实根，求 a 的取值范围.

杭州学军中学 2019 学年第一学期期中考试

高三数学答案

一、选择题:本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	A	D	B	D	B	C	D	C	C

二、填空题:本大题共 7 小题,多空题每题 6 分,单空题每题 4 分,共 36 分.

11. $\underline{\quad -80 \quad}$, $\underline{\quad -1 \quad}$ 12. $\underline{\quad \dfrac{8}{9} \quad}$, $\underline{\quad \dfrac{9}{2} \quad}$

13. $\underline{\quad \dfrac{\pi}{3} \quad}$, $\underline{\quad 7 \quad}$ 14. $\underline{\quad 6\sqrt{2} \quad}$, $\underline{\quad k \geq 0 \quad}$

15. $\underline{\quad -\dfrac{5}{4} \quad}$ 16. $\underline{\quad 8 \quad}$ 17. $\underline{\quad [-4,8] \quad}$

三、解答题:本大题共 5 小题,共 74 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18.(Ⅰ) $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3}),\therefore 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leq 2x+\dfrac{\pi}{3}\leq 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$

所以单调减区间为$\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right),k\in Z;$

(Ⅱ) $\dfrac{\pi}{3}\leq 2x+\dfrac{\pi}{3}\leq\dfrac{4\pi}{3}\ \therefore f\max=1, f\min=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

19.(1) $\overrightarrow{AD}\cdot\left(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=0;$

(2) $\because 4|AE|^2+|BC|^2=2\left(|AB|^2+|AC|^2\right)=10$

$$\therefore\frac{1}{|AE|^2}+\frac{1}{|BC|^2}=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{|AE|^2}+\frac{1}{|BC|^2}\right)\left(4|AE|^2+|BC|^2\right)\geq\frac{9}{10}$$

20.(Ⅰ) $\begin{cases}S_1^2=a_1^3\\S_2^2=a_1^3+a_2^3\end{cases}\therefore\begin{cases}a_1=1\\a_2=2\end{cases}\therefore a_n=n;$

（Ⅱ）$b_n=(-1)^{n-1}\dfrac{4n}{(2n-1)(2n+1)}=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}-(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$

$\therefore b_1+b_2+\cdots+b_n=1-(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}\le 1+\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{2n+2}{2n+1}.$

21.

解：（1）$f'(x)=e^x-a$．若 $a\le 0$，则 $f'(x)>0$，则函数 $f(x)$ 是单调增函数，这与题设矛盾．所以 $a>0$，令 $f'(x)=0$，则 $x=\ln a$．

当 $x<\ln a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 是单调减函数；$x>\ln a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 是单调增函数；于是当 $x=\ln a$ 时，$f(x)$ 取得极小值．

因为函数 $f(x)=e^x-ax+a(a\in\mathbf{R})$ 的图象与 x 轴交于两点 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$（$x_1<x_2$），

所以 $f(\ln a)=a(2-\ln a)<0$，即 $a>e^2$．此时，存在 $1<\ln a$，$f(1)=e>0$；

存在 $3\ln a>\ln a$，$f(3\ln a)=a^3-3a\ln a+a>a^3-3a^2+a>0$，

又 $f(x)$ 在 R 上连续，故 $a>e^2$．

（2）因为 $\begin{cases}e^{x_1}-ax_1+a=0,\\ e^{x_2}-ax_2+a=0,\end{cases}$ 两式相减得 $a=\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}$．

记 $\dfrac{x_2-x_1}{2}=s(s>0)$，则 $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=e^{\frac{x_1+x_2}{2}}-\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}=\dfrac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{2s}\left[2s-(e^s-e^{-s})\right]$，

设 $g(s)=2s-(e^s-e^{-s})$，则 $g'(s)=2-(e^s+e^{-s})<0$，所以 $g(s)$ 是单调减函数，

则有 $g(s)<g(0)=0$，而 $\dfrac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{2s}>0$，所以 $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<0$．

又 $f'(x)=e^x-a$ 是单调增函数，且 $\dfrac{x_1+x_2}{2}>\sqrt{x_1x_2}$；所以 $f'\left(\sqrt{x_1x_2}\right)<0$．

22.（Ⅰ）$f'(x)=\dfrac{1-2x-2ax^2}{x},x>0$

$(1)a>0,f(x)$在$\left(0,\dfrac{-2+\sqrt{4+8a}}{4a}\right)$递增,$\left(\dfrac{-2+\sqrt{4+8a}}{4a},+\infty\right)$递减;

$(2)a=0,f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$递增,$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$递减;

$(3)-\frac{1}{2}<a<0, f(x)$在$\left(0,\frac{-2+\sqrt{4+8a}}{4a}\right)$递增,$\left(\frac{-2+\sqrt{4+8a}}{4a},\frac{-2-\sqrt{4+8a}}{4a}\right)$递减,

$\left(\frac{-2-\sqrt{4+8a}}{4a},+\infty\right)$递增;

$(4)a\le -\frac{1}{2}, f(x)$在$(0,+\infty)$递增;

（2）问题等价于$\frac{\ln x-2}{x}=ax+b$有两解

令$g(x)=\frac{\ln x-2}{x}, x>0$有$g'(x)=\frac{3-\ln x}{x^2}, x>0$

$\therefore g(e^2)=0; g(x)$在$(0,e^3)$递增,$(e^3,+\infty)$递减;$x\to 0, g(x)\to -\infty; x\to +\infty, g(x)\to 0;$

$\therefore$有图象知$a>0$,过$\left(0,-\frac{3}{e}\right)$作切线时,斜率$a$最大

设切点为(x_0,y_0)有$y=\frac{3-\ln x_0}{x_0{}^2}x+\frac{2\ln x_0-5}{x_0}\therefore \frac{2\ln x_0-5}{x_0}=-\frac{3}{e}\therefore x_0=e$

此时斜率a取到最大$\frac{2}{e^2}\therefore 0<a\le \frac{2}{e^2}$.