高三数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：集合、常用逻辑用语、函数、导数及其应用、三角函数、解三角形。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知命题 $p:\forall x\geqslant 1,\ln x\geqslant\sqrt{x}+1$，则 $\neg p$ 为

A. $\exists x<1,\ln x<\sqrt{x}+1$　　B. $\exists x\geqslant 1,\ln x<\sqrt{x}+1$

C. $\exists x\geqslant 1,\ln x\geqslant\sqrt{x}+1$　　D. $\forall x<1,\ln x<\sqrt{x}+1$

2. 已知集合 $A=\{x|y=\ln(2-x)\}$，$B=\{x|x^2<9\}$，则 $B\cap(\complement_{\mathbf{R}}A)=$

A. $(-3,2]$　　B. $[-3,2)$

C. $(2,3]$　　D. $[2,3)$

3. 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=$

A. $-\frac{8}{9}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{8}{9}$　　D. $\frac{\sqrt{17}}{9}$

4. 我们知道，人们对声音有不同的感觉，这与声音的强度有关系．声音的强度常用 I（单位：瓦/米^2，即 $\mathrm{W/m^2}$）表示，但在实际测量时，声音的强度水平常用 L（单位：分贝）表示，它们满足换算公式：$L=10\lg\frac{I}{I_0}$（$L\geqslant 0$，其中 $I_0=1\times10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$ 是人们能听到的最小声音的强度，是听觉的开端）．若使某小区内公共场所声音的强度水平降低10分贝，则声音的强度应变为原来的

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{100}$　　C. $\frac{1}{10}$　　D. $\frac{1}{20}$

5. "$\ln a<\ln b$"是"$a^{\frac{1}{3}}<b^{\frac{1}{3}}$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx+3(a,b\in\mathbf{R})$．若 $f(2)=5$，则 $f(-2)=$

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

7. 若偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，$a=f(\log_2 3)$，$b=f(\log_4 5)$，$c=f(2^{\frac{3}{2}})$，则 a,b,c 满足

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$

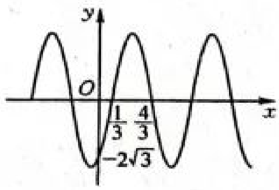
C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

8. 已知函数 $f(x)$ 满足：当 $x\leqslant a$ 时，$f(x)=x^3-x$，且 $f(a+x)=f(a-x)$. 若函数 $f(x)$ 恰有 5 个零点，则 $a=$

A. 1　　B. 0

C. -1　　D. -2

9. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,-\pi<\varphi<0)$ 的部分图象如图所示，则下列判断错误的是



A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2

B. 函数 $f(x)$ 的值域为 $[-4,4]$

C. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{10}{3},0\right)$ 中心对称

D. 函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到 $y=A\sin\omega x$ 的图象

10. 已知函数 $f(x)=e^{4x-1}$，$g(x)=\frac{1}{2}+\ln 2x$，若 $f(m)=g(n)$ 成立，则 $n-m$ 的最小值为

A. $\frac{1-\ln 2}{4}$　　B. $\frac{2\ln 2-1}{3}$

C. $\frac{1+\ln 2}{4}$　　D. $\frac{1+2\ln 2}{3}$

11. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续奇函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，当 $x>0$ 时，$f'(x)+\frac{f(x)}{x}>0$，则使得 $2xf(2x)+(1-3x)f(3x-1)>0$ 成立的 x 的取值范围是

A. $(1,+\infty)$　　B. $\left(\frac{1}{5},1\right)$

C. $\left(-1,\frac{1}{5}\right)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,1)$

12. 定义"函数 $y=f(x)$ 是 D 上的 a 级类周期函数"如下：函数 $y=f(x)$，$x\in D$，对于给定的非零常数 a，总存在非零常数 T，使得定义域 D 内的任意实数 x 都有 $af(x)=f(x+T)$ 恒成立，此时 T 为 $f(x)$ 的周期. 若 $y=f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的 a 级类周期函数，且 $T=1$，当 $x\in[1,2)$ 时，$f(x)=2^x(2x+1)$，且 $y=f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的单调递增函数，则实数 a 的取值范围为

A. $\left[\frac{5}{6},+\infty\right)$　　B. $[2,+\infty)$

C. $\left[\frac{10}{3},+\infty\right)$　　D. $[10,+\infty)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x)=(x+1)(x+a)x^4$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，则 $a=$________.

14. 若函数 $y=2x^3+1$ 与 $y=3x^2-b$ 的图象在一个公共点处的切线相同，则实数 $b=$________.

15. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB=3$，$AC=2$，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=7$，则 $\triangle ABC$ 的面积为________.

16. 设函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+ax$，集合 $M=\{x|f(x)<0\}$，$P=\{x|f'(x)<0\}$，若 $P\subsetneqq M$，则实数 a 的取值构成的集合是________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

在$\triangle ABC$中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，且 $b=2a\sin B$；$\tan A>0$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $b=1,c=2\sqrt{3}$，$\triangle ABC$ 的面积为 S，求$\frac{a}{S}$.

18.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)\left(\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$，对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=f(-x)$.

(1)求 $f(x)$的解析式；

(2)对于任意 $x\in\mathbf{R}$，不等式$|f(x)-1|\leqslant m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

19.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x^2+bx-1$ 有两个零点 x_1,x_2，且 x_1,x_2 的倒数和为-1.

(1)求函数 $f(x)$的解析式；

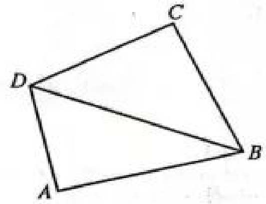
(2)若在区间$[-2,1]$上，不等式 $f(-x)>2x-m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

20.（本小题满分 12 分）

某公园拟利用废地建设两块三角形花圃 ABD 与 BCD，其中$\triangle BCD$ 是以 C 为直角顶点的等腰直角三角形（如图），$AD=1$ 百米，$AB=\sqrt{3}$ 百米.

(1)若$\angle ADB=60^\circ$，求角 A 的大小；

(2)求两块花圃的面积和的最大值.



21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$，$g(x)=e\ln x$.

(1)设函数 $F(x)=f(x)-g(x)$，求 $F(x)$的单调区间；

(2)若存在常数 k,m，使得 $f(x)\geqslant kx+m$，对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，且 $g(x)\leqslant kx+m$，对 $x\in(0,+\infty)$恒成立，则称直线 $y=kx+m$ 为函数 $f(x)$与 $g(x)$的“分界线”，试问：$f(x)$与$g(x)$是否存在“分界线”？若存在，求出“分界线”的方程；若不存在，请说明理由.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=ae^x-x+1(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$的零点的个数；

(2)若 $f(x)$有两个不同的零点 x_1、x_2，证明：$x_1+x_2>4$.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. B　根据命题的否定可知，$\neg p$ 为 $\exists x\geqslant 1, \ln x<\sqrt{x}+1$. 故选 B.

2. D　$\because A=\{x|y=\ln(2-x)\}=\{x|x<2\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x\geqslant 2\}$. 又 $B=\{x|-3<x<3\}$，$\therefore B\cap(\complement_{\mathbf{R}}A)=\{x|2\leqslant x<3\}$. 故选 D.

3. C　因为 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{3}$，两边同时平方可得 $1-\sin 2\alpha=\frac{1}{9}$，即 $\sin 2\alpha=\frac{8}{9}$，所以 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\sin 2\alpha=\frac{8}{9}$. 故选 C.

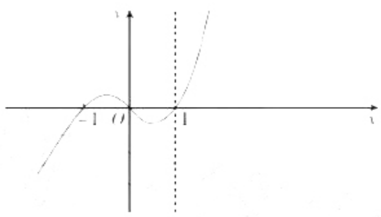
4. C　设该小区内公共场所声音的强度水平为 L_1、L_2，相应声音的强度为 I_1、I_2，由题意，得 $L_1-L_2=10$，即 $10\lg\frac{I_1}{I_0}-10\lg\frac{I_2}{I_0}=10$，解得 $I_2=\frac{1}{10}I_1$. 故选 C.

5. A　由 $\ln a<\ln b$，可得 $0<a<b$，所以 $a^{\frac{1}{3}}<b^{\frac{1}{3}}$，所以充分性成立；当 $a^{\frac{1}{3}}<b^{\frac{1}{3}}$ 时，在 $a<b<0$ 的情况下，$\ln a<\ln b$ 不成立，所以必要性不成立. 故“$\ln a<\ln b$”是“$a^{\frac{1}{3}}<b^{\frac{1}{3}}$”的充分不必要条件. 故选 A.

6. D　令 $g(x)=ax^3+bx$，则 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，又 $f(2)=3$，所以 $g(2)+3=5$，所以 $g(2)=2$，所以 $f(-2)=g(-2)+3=-2+3=1$. 故选 D.

7. B　$\because$ 偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，$\therefore f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增. $\because 2>\log_2 3=\log_4 9>\log_4 5$，$2^{\frac{3}{2}}>2$，$\therefore f(\log_4 5)<f(\log_2 3)<f(2^{\frac{3}{2}})$，$\therefore b<a<c$. 故选 B.

8. A　由 $f(a+x)=f(a-x)$ 知 $f(x)$ 的图象关于 $x=a$ 对称，再结合 $y=x(x+1)(x-1)$ 的大致图象可知，$y=x^3-x$ 有三个零点，最大的零点为 1，则 $a=1$ 时 $y=f(x)$ 的图象恰好与 x 轴有 5 个零点. 故选 A.



9. D　由题设可知 $T=2\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)=2$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{2}=\pi$. 故 A 正确；

又当 $x=\frac{1}{3}$ 时，$A\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=0$，$(-\pi<\varphi<0)\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{3}$，当 $x=0$ 时，$A\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow A=1$，故 B 正确；

由于 $f(x)$ 周期为 2，由图象知 $f(x)$ 关于点 $\left(\frac{10}{3},0\right)$ 中心对称，故 C 正确. 故选 D.

10. C　因为 $f(m)=g(n)$，所以可设 $e^{4m-1}=\frac{1}{2}+\ln 2n=t$，于是 $m=\frac{1}{4}(\ln t+1)$，$n=\frac{1}{2}e^{t-\frac{1}{2}}$，所以 $n-m=\frac{1}{2}e^{t-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\ln t-\frac{1}{4}$. 引入 $h(t)=\frac{1}{2}e^{t-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\ln t-\frac{1}{4}$，则 $h'(t)=\frac{1}{2}e^{t-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4t}$. 又因为 $h'(t)$ 是增函数，且 $h'\left(\frac{1}{2}\right)=0$，所以函数 $h(t)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，所以 $h(t)_{\min}=h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1+\ln 2}{4}$，即 $n-m$ 的最小值为 $\frac{1+\ln 2}{4}$. 故选 C.

11. B　当 $x>0$ 时，$f'(x)+\frac{f(x)}{x}>0\Rightarrow xf'(x)+f(x)>0$，可得 $g(x)=xf(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $g(x)$ 为偶函数，所以 $2xf(2x)+(1-3x)f(3x-1)>0$ 等价于 $g(2x)>g(3x-1)$，可得 $|2x|>|3x-1|$，平方得 $4x^2>9x^2-6x+1$，解得 $\frac{1}{5}<x<1$. 故选 B.

12. C　$\because x\in[1,2)$ 时，$f(x)=2^x(2x+1)$，$\therefore$ 当 $x\in[2,3)$ 时，$f(x)=af(x-1)=a\cdot 2^{x-1}(2x-1)$；当 $x\in[n+1,n+2)$ 时，$f(x)=af(x-1)=a^2f(x-2)=\cdots=a^nf(x-n)=a^n\cdot 2^{x-n}(2x-2n+1)$. 即 $x\in[n+1,n+2)$ 时，$f(x)=a^n\cdot 2^{x-n}(2x-2n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$. 当 $x\in[n,n+1)$ 时，$f(x)=a^{n-1}\cdot 2^{x-n+1}\cdot(2x-2n+3)$，$\because f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore a>0$ 且 $a^n\cdot 2^{n+1-n}\cdot(2n+2-2n+1)\geqslant a^{n-1}\cdot 2^{(n+1-n+1)}\cdot(2n+2-2n+3)$，即 $a^n\cdot 2\cdot 3\geqslant a^{n-1}\cdot 4\cdot 5$，解得 $a\geqslant\frac{10}{3}$. $\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{10}{3},+\infty\right)$. 故选 C.

13. -1　∵$y=x^4$ 为偶函数，∴$y=(x+1)(x+a)=x^2+(a+1)x+a$ 为偶函数，则$-\frac{a+1}{2}=0$，∴$a=-1$.

14. 0 或-1　设公共切点的横坐标为 x_0，函数 $y=2x^3+1$ 的导数为 $y'=6x^2$，$y=3x^2-b$ 的导数为 $y'=6x$. 由题意，可得 $6x_0^2=6x_0$，$1+2x_0^3=3x_0^2-b$，解得 $x_0=0$，$b=-1$ 或 $x_0=1$，$b=0$. 则 $b=0$ 或-1.

15. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　由题意可得$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\times 9+\frac{1}{3}\times 3\times 2\times\cos A=7$，解得 $\cos A=\frac{1}{2}$，故 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故$\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}\times 3\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

16. $\{0,1\}$　$f'(x)=x^2-(a+1)x+a=(x-a)(x-1)$，可以判断当 $a\neq 1$ 时，$f(x)$既有极大值又有极小值，所以要使 $P\subsetneqq M$，只需 $f(x)$的极大值非正.

若 $a>1$，$f(x)$在 $x=1$ 处取极大值，故 $f(1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(a+1)+a=\frac{a}{2}-\frac{1}{6}\leqslant 0$，即 $a\leqslant\frac{1}{3}$，这与 $a>1$ 矛盾；

若 $a<1$，$f(x)$在 $x=a$ 处取极大值，故 $f(a)=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}(a+1)a^2+a^2=a^2(\frac{1}{2}-\frac{a}{6})\leqslant 0$，即 $a=0$，或 $a\geqslant 3$(舍去)；

当 $a=1$ 时，$P=\varnothing$，显然成立，

综上可知，a 的取值构成的集合是$\{0,1\}$.

17. 解：(1)∵$b=2a\sin B$，∴$\sin B=2\sin A\cdot\sin B$，$\sin B>0$，

∴$\sin A=\frac{1}{2}$，∵$\tan A>0$，∴A 为锐角，∴$A=\frac{\pi}{6}$. ………………………… 5 分

(2)∵$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=1+12-4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7$，∴$a=\sqrt{7}$. ………………………… 8 分

又 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴$\frac{a}{S}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$. ………………………… 10 分

18. 解：(1)∵函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)$对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=f(-x)$，

∴函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称.

∴$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=\pm 1$.

∴$\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$. ………………………… 4 分

又∵$\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，∴$\varphi=\frac{\pi}{3}$.

∴$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$. ………………………… 6 分

(2)由题意可得$-m\leqslant f(x)-1\leqslant m$，

则 $1-m\leqslant f(x)\leqslant 1+m$. ………………………… 8 分

又∵$x\in\mathbf{R}$，

∴$f(x)\in[-1,1]$，

∴$\begin{cases}1-m\leqslant -1,\\1+m\geqslant 1.\end{cases}$ ………………………… 10 分

解得 $m\geqslant 2$，

∴实数 m 的取值范围是$[2,+\infty)$. ………………………… 12 分

19. 解：(1)因为函数 $f(x)=x^2+bx-1$ 有两个零点 x_1,x_2，

所以 x_1,x_2 是方程 $x^2+bx-1=0$ 的两个实数根，所以 $x_1+x_2=-b$，$x_1x_2=-1$. ………………………… 2 分

所以$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-b}{-1}=b$. ………………………… 3 分

又 x_1,x_2 的倒数和为-1，所以 $b=-1$. ………………………… 5 分

所以 $f(x)=x^2-x-1$. ………………………… 6 分

(2)不等式 $f(-x)>2x-m$ 等价于 $x^2+x-1>2x-m$，即 $m>-x^2+x+1$. ………………………… 8 分

要使不等式 $m>-x^2+x+1$ 在区间$[-2,1]$上恒成立，只需令函数 $g(x)=-x^2+x+1$ 在区间$[-2,1]$上的最大值小于 m 即可. ………………………… 10 分

因为函数 $g(x)=-x^2+x+1$ 在区间 $\left[-2,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增，在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$，所以 $m>\frac{5}{4}$.

因此，满足条件的实数 m 的取值范围是 $\left(\frac{5}{4},+\infty\right)$. …………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)因为 $AD=1$ 百米，$AB=\sqrt{3}$ 百米，$\angle ADB=60^\circ$，

所以 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos 60^\circ$，

所以 $3=1+BD^2-2\cdot 1\cdot BD\cdot\frac{1}{2}$，即 $BD^2-BD-2=0$，

所以 $BD=2$. …………………………………………………………………………………… 3 分

由正弦定理，得 $\frac{BD}{\sin A}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，即 $\frac{2}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$，

所以 $\sin A=1$，又 $0^\circ<A<180^\circ$，所以 $A=90^\circ$. ……………………………………………… 6 分

(2)在 $\triangle ABD$ 中，设 $A=\theta(0^\circ<\theta<180^\circ)$，则 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot AB\cdot\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$，

所以 $BD^2=AD^2+AB^2-2AD\cdot AB\cos\theta=4-2\sqrt{3}\cos\theta$. ……………………………………… 8 分

在等腰直角 $\triangle BCD$ 中，$BC=DC=\frac{\sqrt{2}}{2}BD$，

所以 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot DC=\frac{1}{4}BD^2=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$. …………………………………… 10 分

所以两个三角形的面积和 $S=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+1-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=1+\frac{\sqrt{6}}{2}\sin(\theta-45^\circ)$.

因为 $0^\circ<\theta<180^\circ$，所以 $-45^\circ<\theta-45^\circ<135^\circ$，所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin(\theta-45^\circ)\leqslant 1$.

所以当 $\theta-45^\circ=90^\circ$，即 $\theta=135^\circ$ 时 S 取得最大值，且 $S_{\max}=1+\frac{\sqrt{6}}{2}$.

所以两块花圃的面积和的最大值为 $\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 平方百米. …………………………………… 12 分

21. 解：(1)由于函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$，$g(x)=e\ln x$，

因此 $F(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^2-e\ln x$，

则 $F'(x)=x-\frac{e}{x}=\frac{(x-\sqrt{e})(x+\sqrt{e})}{x}$，$x\in(0,+\infty)$. …………………………………… 1 分

当 $0<x<\sqrt{e}$ 时，$F'(x)<0$，$\therefore F(x)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 上是减函数；

当 $x>\sqrt{e}$ 时，$F'(x)>0$，$\therefore F(x)$ 在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上是增函数. …………………………… 3 分

因此，函数 $F(x)$ 的单调减区间是 $(0,\sqrt{e})$，单调增区间是 $(\sqrt{e},+\infty)$. …………………… 4 分

(2)由(1)可知，当 $x=\sqrt{e}$ 时，$F(x)$ 取得最小值 $F(\sqrt{e})=0$，

则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象在 $x=\sqrt{e}$ 处有公共点 $\left(\sqrt{e},\frac{e}{2}\right)$. …………………………………… 5 分

假设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 存在“分界线”，则其必过点 $\left(\sqrt{e},\frac{e}{2}\right)$.

故设其方程为：$y-\frac{e}{2}=k(x-\sqrt{e})$，即 $y=kx+\frac{e}{2}-k\sqrt{e}$. …………………………………… 7 分

由 $f(x)\geqslant kx+\frac{e}{2}-k\sqrt{e}$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

则 $x^2-2kx-e+2k\sqrt{e}\geqslant 0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

$\therefore\Delta=4k^2-4(2k\sqrt{e}-e)=4(k-\sqrt{e})^2\leqslant 0$ 成立，

因此 $k=\sqrt{e}$，“分界线”的方程为 $y=\sqrt{e}x-\frac{e}{2}$. …………………………………………… 9 分

下面证明 $g(x)\leqslant\sqrt{e}x-\frac{e}{2}$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

设 $G(x)=e\ln x-\sqrt{e}x+\frac{e}{2}$，则 $G'(x)=\frac{e}{x}-\sqrt{e}=\frac{\sqrt{e}(\sqrt{e}-x)}{x}$.

∴当 $0<x<\sqrt{e}$时,$G'(x)>0$,当 $x>\sqrt{e}$时,$G'(x)<0$,

当 $x=\sqrt{e}$时,$G(x)$取得最大值 0,

则 $g(x)\leqslant\sqrt{e}x-\frac{e}{2}$对 $x\in(0,+\infty)$恒成立. ………………………………………………………… 11 分

故所求"分界线"的方程为 $y=\sqrt{e}x-\frac{e}{2}$. ………………………………………………………………… 12 分

22. (1)解:因为 $f'(x)=ae^x-1$.

当 $a=0$ 时,$f(x)=-x+1=0$,解得 $x=1$. 函数 $f(x)$有一个零点; ………………………………………… 1 分

当 $a<0$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. 又 $f(1)=ae-1+1=ae<0$,存在实数 x_0,当 $x_0<0$ 且 $x_0<1+a$ 时,$f(x_0)=ae^{x_0}-x_0+1>a+1-x_0>0$,所以 $f(x_0)f(1)<0$,函数 $f(x)$有一个零点; ……………………………… 2 分

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=0\Rightarrow x=-\ln a$.

且当 $x<-\ln a$ 时,$f'(x)<0$,此时函数 $f(x)$在$(-\infty,-\ln a)$上单调递减;

当 $x>-\ln a$ 时,$f'(x)>0$,此时函数 $f(x)$在$(-\ln a,+\infty)$上单调递增. ……………………………… 3 分

当 $f(x)_{\min}=f(-\ln a)=2+\ln a<0$,解得 $0<a<\frac{1}{e^2}$. ………………………………………………… 4 分

令 $t=\frac{1}{a}>e$,构造函数 $h(t)=e^t-t^2$,其中 $t>e$,则 $h'(t)=e^t-2t$,

令 $u(t)=e^t-2t$,所以 $u'(t)=e^t-2>0$,

所以函数 $h'(t)$在$(e,+\infty)$上单调递增,可得出 $h'(t)>h'(e)=e^e-2e>e^e-e^2>0$,

所以函数 $h(t)$在$(e,+\infty)$上单调递增,可得出 $h(t)>h(e)=e^e-e^2>0$,

所以当 $0<a<\frac{1}{e^2}$时,$e^{\frac{1}{a}}>\frac{1}{a^2}$.

当 $0<a<\frac{1}{e^2}$时,$f(0)=a+1>0$,$f\left(\frac{1}{a}\right)=ae^{\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}+1>a\cdot\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}+1=1>0$.

所以函数 $f(x)$在$(0,-\ln a)$和$\left(-\ln a,\frac{1}{a}\right)$上各有一个零点,即函数 $f(x)$有两个零点. ……………………… 5 分

当 $f(x)_{\min}=f(-\ln a)=2+\ln a=0$ 时,即 $a=\frac{1}{e^2}$,函数 $f(x)$有一个零点; …………………………………… 6 分

当 $f(x)_{\min}=f(-\ln a)=2+\ln a>0$ 时,即 $a>\frac{1}{e^2}$,函数 $f(x)$没有一个零点. …………………………………… 7 分

综上所述,当 $a\leqslant0$ 或 $a=\frac{1}{e^2}$时,函数 $f(x)$有一个零点;

当 $0<a<\frac{1}{e^2}$时,函数 $f(x)$有两个零点;

当 $a>\frac{1}{e^2}$时,函数 $f(x)$没有一个零点. ……………………………………………………………………… 8 分

(2)证明:由 $f(x)=ae^x-x+1=0$,得$\frac{x-1}{e^x}-a=0$,令 $g(x)=\frac{x-1}{e^x}-a$,则 $g'(x)=\frac{2-x}{e^x}$,

由 $g'(x)=\frac{2-x}{e^x}>0$,得 $x<2$;由 $g'(x)=\frac{2-x}{e^x}<0$,得 $x>2$.

所以 $g(x)$在$(-\infty,2)$上单调递增,在$(2,+\infty)$上单调递减. ………………………………………………… 9 分

由于 x_1、x_2 是方程 $g(x)=0$ 的实根,不妨设 $x_1<2<x_2$,

要证 $x_1+x_2>4$,只要证 $x_2>4-x_1>2$.

由于 $g(x)$在$(2,+\infty)$单调递减,故只要证 $g(x_2)<g(4-x_1)$,

由于 $g(x_1)=g(x_2)=0$,故只要证 $g(x_1)<g(4-x_1)$. …………………………………………………………… 10 分

令 $H(x)=g(x)-g(4-x)=\frac{x-1}{e^x}-\frac{3-x}{e^{4-x}}(x<2)$,

则 $H'(x)=\frac{2-x}{e^x}-\frac{2-x}{e^{4-x}}=\frac{(e^{4-x}-e^x)(2-x)}{e^4}$,

因为 $x<2$,所以 $2-x>0$,$4-x>x$,所以 $e^{4-x}>e^x$,即 $e^{4-x}-e^x>0$,

所以 $H'(x)>0$,所以 $H(x)$在$(-\infty,2)$上为增函数.

所以 $H(x_1)<H(2)=0$,即有 $g(x_1)<g(2-x_1)$成立,所以 $x_1+x_2>4$. …………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线