★启用前注意保密

2022年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（一）

数　学

本试卷共6页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己所在的市（县、区）、学校、班级、姓名、考场号、座位号和考生号填写在答题卡上，将条形码横贴在每张答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先画掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z=(2+i)(1-2i)$，其中 i 是虚数单位，则 $|z|=$

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

2. 若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$

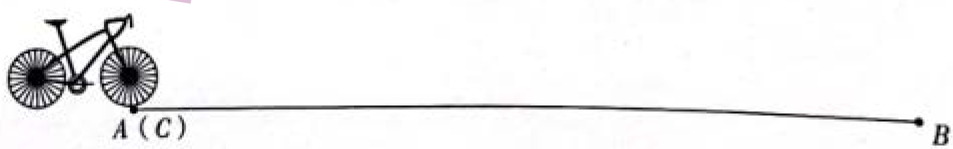
A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

3. 已知 α 为锐角，且 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$，则 $\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)=$

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 为解决皮尺长度不够的问题，实验小组利用自行车来测量 A，B 两点之间的直线距离．如下图，先将自行车前轮置于点 A，前轮上与点 A 接触的地方标记为点 C，然后推着自行车沿 AB 直线前进（车身始终保持与地面垂直），直到前轮与点 B 接触．经观测，在前进过程中，前轮上的标记点 C 与地面接触了10次，当前轮与点 B 接触时，标记点 C 在前轮的左上方（以下图为观察视角），且到地面的垂直高度为 0.45 m．已知前轮的半径为 0.3 m，则 A，B 两点之间的距离约为

（参考数值：$\pi\approx3.14$）

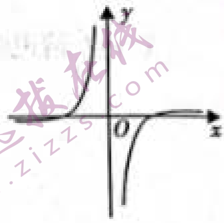


A. 20.10 m　　B. 19.94 m　　C. 19.63 m　　D. 19.47 m

5. 从集合 $U=\{1,2,3\}$ 的非空子集中随机选择两个不同的集合 A，B，则 $A\cap B=\{1\}$ 的概率为

A. $\dfrac{4}{21}$　　B. $\dfrac{5}{42}$　　C. $\dfrac{1}{7}$　　D. $\dfrac{5}{56}$

6. 已知函数 $f(x)=\ln|x|$，$g(x)=e^{x}-e^{-x}$，则图象如右图的函数可能是



A. $f(x)+g(x)$　　B. $f(x)-g(x)$

C. $f(x)g(x)$　　D. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

7. 已知 F_1，F_2 是双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点，$A$ 是 C 的右顶点，点 P 在过点 A 且斜率为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 的直线上，$\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形，$\angle F_1F_2P=120^\circ$，则 C 的离心率为

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=n^{\frac{1}{n}}$（$n\in\mathbf{N}^*$），当 a_n 最大时，n 的值为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

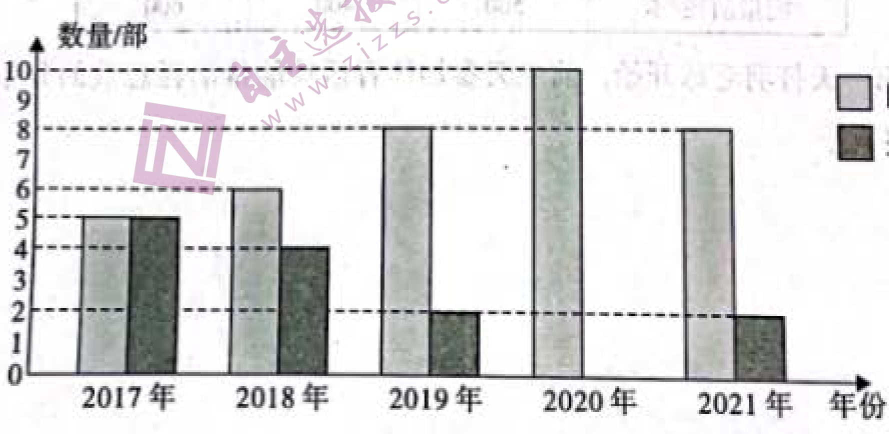
二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 设 m，n 为不同的直线，α，β 为不同的平面，则下列结论中正确的是

A. 若 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha$，则 $m/\!/n$　　B. 若 $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则 $m/\!/n$

C. 若 $m/\!/\alpha$，$m\subset\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$　　D. 若 $m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$m\perp n$，则 $\alpha\perp\beta$

10. 中国正在从电影大国迈向电影强国．下面是 2017 至 2021 年各年国内电影票房前十名影片中，国产影片（含合拍片）与进口影片数量统计图，则下列说法中正确的是



A. 2017至2021年各年国内电影票房前十名影片中，国产影片数量占比不低于50%

B. 2017至2021年各年国内电影票房前十名影片中，国产影片数量占比逐年提高

C. 2017至2021年各年国内电影票房前十名影片中，国产影片数量的平均数大于进口影片数量的平均数

D. 2017至2021年各年国内电影票房前十名影片中，国产影片数量的方差等于进口影片数量的方差

11. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_n+a_{n+1}=2^n$（$n\in\mathbf{N}^*$），则下列结论中正确的是

A. $a_4=5$

B. $\{a_n\}$为等比数列

C. $a_1+a_2+\cdots+a_{2021}=2^{2022}-3$

D. $a_1+a_2+\cdots+a_{2022}=\dfrac{2^{2023}-2}{3}$

12. 已知抛物线C：$y^2=4x$的焦点为F，抛物线C上存在n个点P_1，P_2，…，P_n（$n\geq 2$且$n\in\mathbf{N}^*$）满足$\angle P_1FP_2=\angle P_2FP_3=\cdots=\angle P_{n-1}FP_n=\angle P_nFP_1=\dfrac{2\pi}{n}$，则下列结论中正确的是

A. $n=2$时，$\dfrac{1}{|P_1F|}+\dfrac{1}{|P_2F|}=2$

B. $n=3$时，$|P_1F|+|P_2F|+|P_3F|$的最小值为9

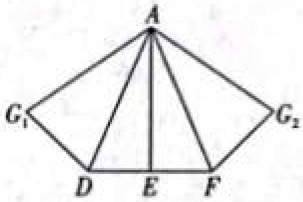
C. $n=4$时，$\dfrac{1}{|P_1F|+|P_3F|}+\dfrac{1}{|P_2F|+|P_4F|}=\dfrac{1}{4}$

D. $n=4$时，$|P_1F|+|P_2F|+|P_3F|+|P_4F|$的最小值为8

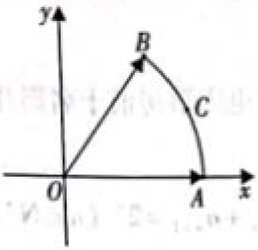
三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 二项式$\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x}\right)^6$展开式中的常数项为________.

14. 下图为四棱锥$A-DEFG$的侧面展开图（点G_1，G_2重合为点G），其中$AD=AF$，$G_1D=G_2F$，E是线段DF的中点，请写出四棱锥$A-DEFG$中一对一定相互垂直的异面直线：________.（填上你认为正确的一个结论即可，不必考虑所有可能的情形）



15. 如下图，已知扇形 AOB 的半径为 10，以 O 为原点建立平面直角坐标系，$\overrightarrow{OA}=(10,0)$，$\overrightarrow{OB}=(6,8)$，则 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点 C 的坐标为__________.



16. 已知直线 $y=t$ 分别与函数 $f(x)=2x+1$ 和 $g(x)=2\ln x+x$ 的图象交于点 A，B，则 $|AB|$ 的最小值为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （10 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 下面给出有关 $\triangle ABC$ 的三个论断：①$a^2+c^2-b^2=ac$；②$c=2b\cos B$；③$a\cos C+\sqrt{3}a\sin C=b+c$.

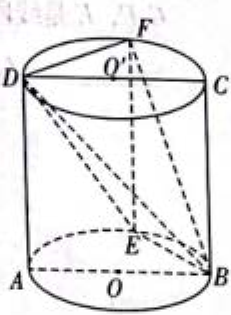
化简上述三个论断，求出角的值或角的关系，并以其中两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出所有可能的真命题.（不必证明）

18. （12 分）

如下图，$ABCD$ 为圆柱 OO' 的轴截面，EF 是圆柱上异于 AD，BC 的母线.

（1）证明：$BE\perp$ 平面 DEF；

（2）若 $AB=BC=2$，当三棱锥 $B-DEF$ 的体积最大时，求二面角 $B-DF-E$ 的余弦值.



19. (12 分)

已知正项数列$\{a_n\}$，其前 n 项和 S_n 满足 $a_n(2S_n-a_n)=1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求证：数列$\{S_n^2\}$是等差数列，并求出 S_n 的表达式；

(2) 数列$\{a_n\}$中是否存在连续三项 a_k，a_{k+1}，a_{k+2}，使得$\frac{1}{a_k}$，$\frac{1}{a_{k+1}}$，$\frac{1}{a_{k+2}}$构成等差数列？请说明理由.

20. (12 分)

小王每天 17:00—18:00 都会参加一项自己喜欢的体育运动，运动项目有篮球、羽毛球、游泳三种. 已知小王当天参加的运动项目只与前一天参加的运动项目有关，在前一天参加某类运动项目的情况下，当天参加各类运动项目的概率如下表：

前一天	当天		
	篮球	羽毛球	游泳
篮球	0.5	0.2	0.3
羽毛球	0.3	0.1	0.6
游泳	0.3	0.6	0.1

(1) 已知小王第一天打羽毛球，则他第三天做哪项运动的可能性最大？

(2) 已知小王参加三种体育运动一小时的能量消耗如下表所示：

运动项目	篮球	羽毛球	游泳
能量消耗/卡	500	400	600

求小王从第一天打羽毛球开始，前三天参加体育运动能量消耗总数的分布列和期望.

21. (12 分)

已知$f(x)=\ln x+ax+1$ $(a\in\mathbf{R})$，$f'(x)$为$f(x)$的导函数.

(1) 若对任意 $x>0$ 都有 $f(x)\leqslant 0$，求 a 的取值范围；

(2) 若$0<x_1<x_2$，证明：对任意常数 a，存在唯一的 $x_0\in(x_1,x_2)$，使得 $f'(x_0)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$成立.

22.（12 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），其右焦点为 $F(\sqrt{3},0)$，点 M 在圆 $x^2+y^2=b^2$ 上但不在 y 轴上，过点 M 作圆的切线交椭圆于 P，Q 两点，当点 M 在 x 轴上时，$|PQ|=\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）当点 M 在圆上运动时，试探究 $\triangle FPQ$ 周长的取值范围.

★启用前注意保密

2022 年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（一）

数学参考答案

评分标准：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	C	D	A	D	B	B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。（全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	BD	ACD	AD	BC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 60

14. AE 和 GF（AE 和 DG、AE 和 DF、AG 和 DF）（写出其中一对即可）

15. $(4\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$

16. $\frac{3}{2}-\ln 2$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。

17. 解：论断1中，由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$，…………………… 1 分

由 $B\in(0,\pi)$，得 $B=\frac{\pi}{3}$. …………………………………………………… 2 分

论断2中，因为 $c=2b\cos B$，由正弦定理得，$\sin C=2\sin B\cos B=\sin 2B$，…… 3 分

因为角 B、C 是 $\triangle ABC$ 的内角，所以 $C=2B$ 或 $C+2B=\pi$. …………………… 5 分

论断3中，由正弦定理得，$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B+\sin C$，

即 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin(A+C)+\sin C$，……………………………… 6 分

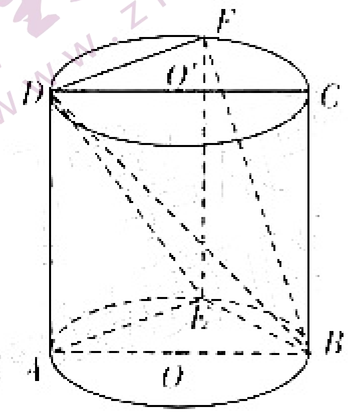
即 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin C$，

则$\sqrt{3}\sin A\sin C=\cos A\sin C+\sin C$，又因为$\sin C\neq 0$，所以$\sqrt{3}\sin A=\cos A+1$，…… 7 分

得$\sin\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，又因为$A\in(0,\ \pi)$，所以$A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，得$A=\dfrac{\pi}{3}$. …… 8 分

以其中两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，所有可能的真命题有：①③⇒② 和 ①②⇒③. …………………………………………………………………… 10 分

18. (1) 证明：如右图，连接AE，由题意知AB为⊙O的直径，所以$AE\perp BE$. …………………………………… 1 分



因为AD、EF是圆柱的母线，所以$AD/\!/EF$且$AD=EF$，所以四边形$AEFD$是平行四边形.

所以$AE/\!/DF$.

所以$BE\perp DF$. …………………………………………………… 2 分

因为EF是圆柱的母线，所以$EF\perp$平面ABE.

又因为$BE\subset$平面ABE，

所以$EF\perp BE$. …………………………………………………… 3 分

又因为$DF\cap EF=F$，DF、$EF\subset$平面DEF，

所以$BE\perp$平面DEF. ………………………………………………………………………… 4 分

(2) 解：由(1)知BE是三棱锥$B-DEF$底面DEF上的高，

由(1)知$EF\perp AE$，$AE/\!/DF$，所以$EF\perp DF$，即底面三角形DEF是直角三角形.

设$DF=AE=x$，$BE=y$，则$x^2+y^2=4$.

所以$V_{B-DEF}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle DEF}\cdot BE=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times x\times 2\right)\times y=\dfrac{1}{3}xy\leqslant\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{2}=\dfrac{2}{3}$.

当且仅当$x=y=\sqrt{2}$时等号成立，即点E、F分别是$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{CD}$的中点时，三棱锥$B-DEF$的体积最大. ……………………………………………………………………………… 8 分

(下求二面角$B-DF-E$的余弦值)

方法一：由(1)得$BE\perp$平面DEF，因为$DF\subset$平面DEF，所以$BE\perp DF$. …… 9 分

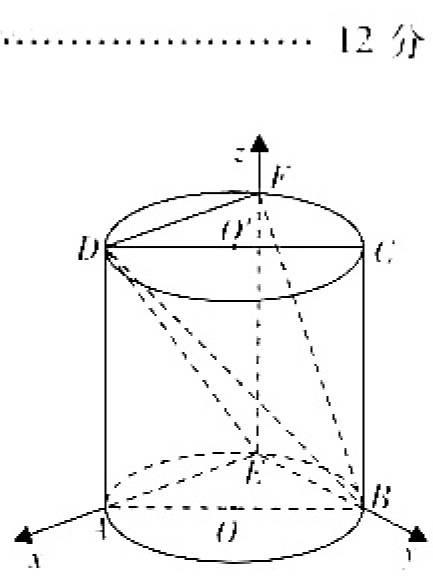
又因为$EF\perp DF$，$EF\cap BE=E$，所以$DF\perp$平面BEF. 因为$BF\subset$平面BEF，所以$BF\perp DF$. 所以$\angle BFE$是二面角$B-DF-E$的平面角. ……………………… 10 分

由(1)知$\triangle BEF$为直角三角形，则$BF=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}$. ……………… 11 分

故$\cos\angle BFE=\dfrac{EF}{BF}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

所以二面角$B-DF-E$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ………………………………………………… 12 分

方法二：由(1)知EA、EB、EF两两相互垂直，如右图，以点E为原点，EA、EB、EF所在直线为x、y、z轴建立空间直角坐标系$E-xyz$.



则$B(0,\ \sqrt{2},\ 0)$，$D(\sqrt{2},\ 0,\ 2)$，$E(0,\ 0,\ 0)$，$F(0,\ 0,\ 2)$.
……………………………………………………………… 9 分

易知平面DEF的法向量为$\overrightarrow{EB}=(0,\ \sqrt{2},\ 0)$.

设平面BDF的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，由$\overrightarrow{DF}=(-\sqrt{2},\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{BF}=(0,\ -\sqrt{2},\ 2)$，

得$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0, \end{cases}$即$\begin{cases} -\sqrt{2}x=0, \\ -\sqrt{2}y+2z=0, \end{cases}$即$\begin{cases} x=0, \\ y=\sqrt{2}z. \end{cases}$取$z=1$，得$\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{2},1)$. …… 10 分

设二面角$B-DF-E$的平面角为θ，

则$|\cos\theta|=|\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{EB}>|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{EB}|}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. …………………… 11 分

由图可知θ为锐角，所以二面角$B-DF-E$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. …………………… 12 分

19. （1）证明：由题意可得，$a_1=1$. 当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}$.

所以$(S_n-S_{n-1})[2S_n-(S_n-S_{n-1})]=1$，…………………………………… 2 分

得$S_n^2-S_{n-1}^2=1$. …………………………………………………………… 3 分

又$S_1^2=a_1^2=1$，

所以$\{S_n^2\}$是以 1 为首项，1 为公差的等差数列. ………………………… 4 分

所以$S_n^2=n$. …………………………………………………………………… 5 分

因为$\{a_n\}$是正项数列，所以$S_n>0$. 故$S_n=\sqrt{n}$. ……………………………… 6 分

（2）解：不存在.

理由如下：

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$，………………………………… 7 分

因为$a_1=1$，所以对于$n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$. ……………………… 8 分

则$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$. ………………………………… 9 分

假设存在满足要求的连续三项a_k，a_{k+1}，a_{k+2}，使得$\dfrac{1}{a_k}$，$\dfrac{1}{a_{k+1}}$，$\dfrac{1}{a_{k+2}}$构成等差数列，

则$2(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})=\sqrt{k}+\sqrt{k-1}+\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}$.

即$\sqrt{k+1}+\sqrt{k}=\sqrt{k-1}+\sqrt{k+2}$. ………………………………………… 10 分

两边同时平方，得$k+1+k+2\sqrt{k+1}\sqrt{k}=k-1+k+2+2\sqrt{k-1}\sqrt{k+2}$.

即$(k+1)k=(k-1)(k+2)$，

因为$k^2+k=k^2+k-2$显然不成立，与假设矛盾，…………………………… 11 分

所以数列$\{a_n\}$中不存在满足要求的连续三项. ……………………………… 12 分

20. 解：（1）用A、B、C分别表示篮球、羽毛球、游泳三种运动项目，用$P_n(A)$，$P_n(B)$，$P_n(C)(n\in\mathbf{N}^*)$分别表示第n天小王进行A、B、C三种运动项目的概率. ……………………………………………………………………………… 1 分

因为小王第一天打羽毛球，

所以第 2 天小王做三项运动的概率分别为$P_2(A)=0.3$，$P_2(B)=0.1$，$P_2(C)=0.6$. ……………………………………………………………………………… 2 分

第 3 天小王做三项运动的概率分别为$P_3(A)=P_2(A)\times0.5+P_2(B)\times0.3+P_2(C)\times0.3=0.36$，

$P_3(B)=P_2(A)\times0.2+P_2(B)\times0.1+P_2(C)\times0.6=0.43$，

$P_3(C)=P_2(A)\times0.3+P_2(B)\times0.6+P_2(C)\times0.1=0.21$，……………………… 4 分

所以小王第三天打羽毛球的可能性最大. ……………………………………… 5 分

（2）小王从第一天打羽毛球开始，前三天的运动项目安排有：BAA、BAB、BAC、BBA、BBB、BBC、BCA、BCB、BCC 共9种，

运动能量消耗总数用 X 表示，有1200，1300，1400，1500，1600共5种可能. …… 6分

$P(X=1200)=P(BBB)=0.1\times0.1=0.01$，

$P(X=1300)=P(BAB)+P(BBA)=0.3\times0.2+0.1\times0.3=0.09$，

$P(X=1400)=P(BAA)+P(BBC)+P(BCB)=0.3\times0.5+0.1\times0.6+0.6\times0.6=0.57$，

$P(X=1500)=P(BAC)+P(BCA)=0.3\times0.3+0.6\times0.3=0.27$，

$P(X=1600)=P(BCC)=0.6\times0.1=0.06$， …………………………………… 9分

所以小王从第一天打羽毛球开始，前三天参加体育运动能量消耗总数 X 的分布列为

X	1200	1300	1400	1500	1600
P	0.01	0.09	0.57	0.27	0.06

…………………… 10分

能量消耗总数 X 的期望

$E(X)=1200\times0.01+1300\times0.09+1400\times0.57+1500\times0.27+1600\times0.06=1428$（卡），

所以小王从第一天打羽毛球开始，前三天参加体育运动能量消耗总数 X 的期望为1428卡. …………………………………………………………………… 12分

21.（1）解：因为 $f'(x)=\frac{1}{x}+a=\frac{ax+1}{x}$（$x>0$）， …………………………………… 1分

所以，当 $a\geqslant0$ 时，$f(1)=a+1>0$ 不符合题意. …………………………………… 2分

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $x>-\frac{1}{a}$；令 $f'(x)>0$，得 $0<x<-\frac{1}{a}$，

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在区间 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减， …… 3分

由题得 $f\left(-\frac{1}{a}\right)=\ln\left(-\frac{1}{a}\right)\leqslant0$，解得 $a\leqslant-1$. …………………………………… 4分

所以 $a\leqslant-1$.

综上所述 $a\leqslant-1$. ………………………………………………………………… 5分

（2）证明：设 $g(x)=f'(x)-\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$，问题转化为 $g(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 上有唯一的零点， …………………………………………………………………… 6分

由 $g(x)=f'(x)-\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{1}{x}+a-\frac{\ln x_1+ax_1-\ln x_2-ax_2}{x_1-x_2}$，易知 $g(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 上单调递减，故函数 $g(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 上至多有1个零点， …… 7分

由 $g(x_1)=f'(x_1)-\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{1}{x_1}+a-\frac{\ln x_1+ax_1-\ln x_2-ax_2}{x_1-x_2}=$

$\frac{1}{x_1}-\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=\frac{1}{x_1-x_2}\left(1-\frac{x_2}{x_1}+\ln\frac{x_2}{x_1}\right)$，

同理，得 $g(x_2)=\frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{x_1}{x_2}-1+\ln\frac{x_2}{x_1}\right)$， …………………………………… 8分

由（1）知，当 $a=-1$ 时，$\ln x-x+1\leqslant0$，当且仅当 $x=1$ 时取等号， …… 9分

因为 $0<x_1<x_2$，所以 $\frac{x_2}{x_1}>1$，

所以 $\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_2}{x_1}+1<0$，

又因为 $x_1-x_2<0$，即 $\frac{1}{x_1-x_2}<0$，所以 $g(x_1)>0$， …………………………………… 10 分

因为 $0<x_1<x_2$，所以 $0<\frac{x_1}{x_2}<1$，

所以 $\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_1}{x_2}+1<0$，即 $\ln\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}-1>0$，

又因为 $x_1-x_2<0$，即 $\frac{1}{x_1-x_2}<0$，所以 $g(x_2)<0$， …………………………………… 11 分

由函数零点存在定理知 $g(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 上有唯一的零点，即存在唯一的 $x_0\in(x_1, x_2)$，使得 $f'(x_0)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ 成立． …………………………………… 12 分

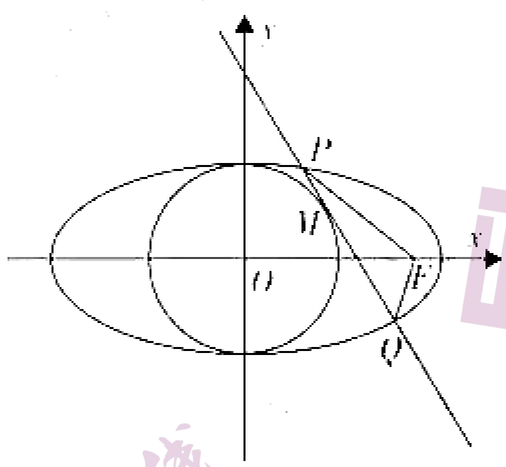
22．解：(1) 由题可知 $c=\sqrt{3}$， …………………………………… 1 分

当点 M 在 x 轴上时，$|PQ|=\sqrt{3}$，不妨设 $P\left(b, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$， …………………………………… 2 分

得 $\begin{cases} a^2-b^2=3, \\ \frac{b^2}{a^2}+\frac{\frac{3}{4}}{b^2}=1, \end{cases}$ …………………………………… 3 分

解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=1. \end{cases}$ 所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$． …………………………………… 4 分

(2) 设 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，



则 $|PF|=\sqrt{(x_1-\sqrt{3})^2+(y_1-0)^2}=\sqrt{(x_1-\sqrt{3})^2+1-\frac{x_1^2}{4}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1-2\right)^2}=2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1$，

同理 $|QF|=2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2$， …………………………………… 5 分

$|PM|=\sqrt{OP^2-b^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2-1}=\sqrt{x_1^2-\frac{x_1^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}|x_1|$，

同理 $|QM|=\frac{\sqrt{3}}{2}|x_2|$，

所以 $\triangle FPQ$ 的周长为

$2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2+\frac{\sqrt{3}}{2}|x_1|+\frac{\sqrt{3}}{2}|x_2|=4+\sqrt{3}\frac{|x_1|+|x_2|-x_1-x_2}{2}$. ……………… 6 分

①当直线 PQ 的斜率不存在时，PQ 的方程为 $x=1$ 或 $x=-1$.

PQ 的方程为 $x=1$ 时，不妨设 P、Q 的坐标分别为 $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$、$\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，此时 $\triangle FPQ$ 的周长为 4.

PQ 的方程为 $x=-1$ 时，不妨设 P、Q 的坐标分别为 $\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$、$\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，此时 $\triangle FPQ$ 的周长为 $4+2\sqrt{3}$. ……………………………………………………………… 7 分

②当直线 PQ 的斜率存在时，设 PQ 的方程为 $y=kx+m$，

由直线 PQ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，得 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，即 $m^2=1+k^2$. ……… 8 分

联立得 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1. \end{cases}$ 化简得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$.

$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}, \\ x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}. \end{cases}$ 易知 $\Delta>0$ 恒成立. …………………………………………… 9 分

$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}=\frac{4k^2}{1+4k^2}>0$，即 x_1、x_2 同号.

当 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}>0$ 时，即 $km<0$，此时点 M 在 y 轴右侧，所以 $x_1>0$，$x_2>0$.

此时 $\triangle FPQ$ 的周长 $=4+\sqrt{3}\frac{|x_1|+|x_2|-x_1-x_2}{2}=4$ 为定值. ……………………… 10 分

当 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}<0$ 时，即 $km>0$，此时点 M 在 y 轴左侧，所以 $x_1<0$，$x_2<0$.

此时 $\triangle FPQ$ 的周长 $=4+\sqrt{3}\frac{|x_1|+|x_2|-x_1-x_2}{2}=4-\sqrt{3}(x_1+x_2)=4+\frac{8\sqrt{3}km}{1+4k^2}=$

$4+\frac{8\sqrt{3}km}{m^2+3k^2}=4+\frac{8\sqrt{3}}{\frac{m}{k}+3\frac{k}{m}}$. …………………………………………………… 11 分

因为 $km>0$，所以 $\frac{m}{k}+3\frac{k}{m}\geqslant 2\sqrt{3}$，当且仅当 $\frac{m}{k}=3\frac{k}{m}$，即 $\begin{cases} m=\frac{\sqrt{6}}{2}, \\ k=\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=-\frac{\sqrt{6}}{2}, \\ k=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ 时取等号.

从而 $4<4+\frac{8\sqrt{3}}{\frac{m}{k}+3\frac{k}{m}}\leqslant 8$，所以 $\triangle FPQ$ 周长的取值范围为 $(4,8]$.

综上所述，$\triangle FPQ$ 周长的取值范围为 $[4,8]$. ……………………………………… 12 分