天一大联考

“顶尖计划”2023 届高中毕业班第四次考试

理科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 A 为英文单词“book”的字母组成的集合，集合 B 为英文单词“bike”的字母组成的集合，则集合 $A\cap B$ 的子集个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 已知复数 $z=\dfrac{3+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}+2\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

3.《工程做法则例》是清朝雍正时期官方发布的一部较为系统全面的建筑工程专书，里面有一句话：“凡檐柱（支撑屋檐的柱子）以面阔十分之八定高，以百分之七定径寸（直径）.”这句话规定了房屋檐柱的高、直径与房屋宽度之间的比例. 假设某座房子的“面阔”为 4 m，檐柱形状为圆柱，根据书中这句话的要求，这座房子的一根檐柱的体积为

A. $0.062\ 72\pi\ \mathrm{m}^3$　　B. $0.627\ 2\pi\ \mathrm{m}^3$

C. $0.031\ 36\pi\ \mathrm{m}^3$　　D. $0.313\ 6\pi\ \mathrm{m}^3$

4. 已知圆 $x^2-2x+y^2=0$ 与圆 C 关于直线 $x+y=0$ 对称，且点 $A(-\sqrt{3},0)$，$B(0,\sqrt{3})$，P 是圆 C 上一点，则 $\angle BAP$ 的最大值为

A. 45°　　B. 75°　　C. 105°　　D. 120°

5. 今年 3 月 5 日“学雷锋”日，甲、乙、丙、丁、戊等 5 名学生去 4 个敬老院帮助老人，若每名学生只去 1 个敬老院，且每个敬老院至少有 1 名学生去，则甲、乙到同一敬老院的概率

A. $\dfrac{1}{10}$　　B. $\dfrac{1}{6}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

6. 已知变量 x 与 y 的一组样本数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_6,y_6)$ 满足 $x_1x_2x_3x_4x_5x_6=\mathrm{e}^{24}$，$y_1y_2y_3y_4y_5y_6=\mathrm{e}^{18.3}$，对各样本数据求对数，再利用线性回归分析的方法得 $\ln y=1+b\ln x$. 若变量 $z=2y-0.5x$，则当 z 的预测值最大时，变量 x 的取值约为（$\mathrm{e}^2\approx7.4$）

A. 5.4　　B. 10.9　　C. 14.8　　D. 29.6

7. 在直角坐标系 xOy 中，点 P,Q 绕坐标原点按逆时针方向同时开始做匀速圆周运动，点 P 从点 $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 出发，角速度为 $\frac{\pi}{3}$ rad/s，点 Q 从点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{10},-\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)$ 出发，角速度为 $\frac{\pi}{6}$ rad/s，以射线 OP 与 OQ 为终边的角分别设为 α 与 β，则 3 s 后，$\cos(\alpha-\beta)=$

A. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　B. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

8. 已知 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 分别为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，点 P 在 C 的右支上，点 Q 在直线 $l:x=-\frac{c^2+a^2}{c}$ 上，若 $\overrightarrow{F_1F_2}=\overrightarrow{QP}$，则双曲线 C 的离心率的取值范围是

A. $\left(1,\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$

C. $\left(1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$

9. 将函数 $y=\sin x$ 的图象上各点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{3}$，得到函数 $y=f(x)$ 的图象，若 $f(x)$ 在区间 $\left[t,t+\frac{\pi}{6}\right]$ 上的最大值为 M，最小值为 N，则 $M-N$ 的最小值为

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　　D. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

10. 已知曲线 $y=\sqrt{x}$ 在点 $(x_0,\sqrt{x_0})$ $\left(0<x_0<\frac{1}{4}\right)$ 处的切线也与曲线 $y=e^x$ 相切，则 x_0 所在的区间是

A. $\left(0,\frac{1}{4e^4}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{4e^4},\frac{1}{4e^2}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{4e^2},\frac{1}{4e}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{4e},\frac{1}{4}\right)$

11. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的表面积为 5π，$AA_1=2$，点 P 在四边形 A_1ACC_1 内，且直线 BP 与平面 A_1ACC_1 所成角为 $\frac{\pi}{4}$，则长方体的体积最大时，动点 P 的轨迹长为

A. π　　B. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

12. 已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，$f(3-x)+f(1+x)=0$，且 $f(x)$ 在区间 $[2,4]$ 上单调递减，设 $a=f(8-1.1^{1.1})$，$b=f(e^{0.11})$，$c=-f(11-1.1\ln 1.1)$，则

A. $c>b>a$　　B. $c>a>b$　　C. $b>a>c$　　D. $a>c>b$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知实数 x,y 满足不等式组 $\begin{cases}3x+2y\leq 12,\\ x+2y\leq 8,\\ x+y\geq 4,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最大值为________.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，$|\boldsymbol{a}|=2$，$\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量，且 $\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{b}=3$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$________.

15. 已知不经过坐标原点 O 的直线 l 与抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$ 交于 A,B 两点,以 AB 为直径的圆经过点 O,若当直线 l 变化时,点 $P(1,\sqrt{2p})$ 到直线 l 的最大距离为 $\sqrt{7}$,则 E 的准线方程为__________.

16. 已知锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, $a\sin A=(b+c)\sin B$,则 $\dfrac{2b+c}{a}$ 的取值范围是__________.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答. 第 22,23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17. (12 分)

已知在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_{n+1}=ka_n+n-1$,且数列 $\{a_n+n\}$ 为等比数列.

(Ⅰ)求实数 k 的值;

(Ⅱ)求数列 $\{2^n a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18. (12 分)

某条街边有 A,B 两个生意火爆的早餐店, A 店主卖胡辣汤、油条等, B 店主卖煎饼果子、豆浆等,小明为了解附近群众的早餐饮食习惯与年龄的关系,随机调查了 200 名到这两个早餐店就餐的顾客,统计数据如下:

	A 店	B 店
年龄 50 岁及以上	40	60
年龄 50 岁以下	10	90

(Ⅰ)判断是否有 99% 的把握认为附近群众的早餐饮食习惯与年龄有关.

(Ⅱ)某天有 3 名顾客到这两个早餐店就餐(每人只选一家),他们选择 A 店的概率分别为 $\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{5},m(0<m<1)$,且他们的选择相互独立. 设 3 人中到 A 店就餐的人数为 X,到 B 店就餐的人数为 Y,若 $E(X)>E(Y)$,求 m 的取值范围.

附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

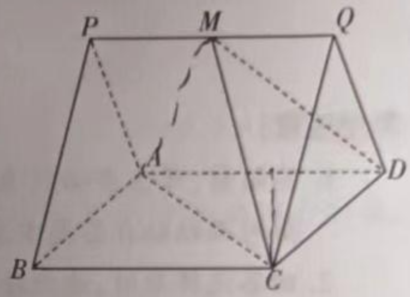
$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

9. (12 分)

在如图所示的几何体中，四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形，$\angle DAB=120°$，平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $QCD\perp$ 平面 $ABCD$，且 $\triangle PAB$，$\triangle QCD$ 均为等边三角形，M 为线段 PQ 的中点.

(Ⅰ)证明：$AC\perp DM$；

(Ⅱ)求二面角 $D-CM-Q$ 的余弦值.



0. (12 分)

已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-ax^2$.

(Ⅰ)当 $a=\frac{e^2}{2}$ 时，求 $f(x)$ 的极值；

(Ⅱ)若关于 x 的不等式 $f(x)+(2-x)e^x\geqslant(2-a)x+a$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

1. (12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 D 在 C 上，$|DF_1|=\frac{3}{2}$，$|DF_2|=\frac{5}{2}$，$|DF_2|>|F_1F_2|$，且 $\triangle DF_1F_2$ 的面积为 $\frac{3}{2}$.

(Ⅰ)求 C 的方程；

(Ⅱ)设 C 的左顶点为 A，直线 $l:x=-6$ 与 x 轴交于点 P，过 P 作直线交 C 于 G,H 两点，直线 AG,AH 分别与 l 交于 M,N 两点，O 为坐标原点，证明：O,A,N,M 四点共圆.

二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22,23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

2. [选修 4-4：坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=t,\\ y=t^2\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2=6\rho\cos\theta-8$.

(Ⅰ)求 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程；

(Ⅱ)若 P 和 Q 分别是 C_1 和 C_2 上的一点，求 $|PQ|$ 的最小值.

3. [选修 4-5：不等式选讲](10 分)

已知正实数 a,b 满足 $(a+1)^3+(b+1)^3=16$，设 $a+b$ 的最大值为 m.

(Ⅰ)求 m 的值；

(Ⅱ)若 $|2x-a|\leqslant m$，$|2y-a|\leqslant m$，求证：$|2x-4y+a|\leqslant 6$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。