机密★启用前(新高考卷)

华中师范大学第一附属中学2021年高考押题卷

数 学

本试题卷共4页,22题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 M,N 为 $\mathbf{R}$ 的两个不相等的非空子集,若 $(\complement_{\mathbf{R}}N)\subseteq(\complement_{\mathbf{R}}M)$,则下列结论中正确的是

A. $\forall x\in N,x\in M$　　B. $\exists x\in M,x\notin N$　　C. $\exists x\notin N,x\in M$　　D. $\forall x\in M,x\notin \complement_{\mathbf{R}}N$

2. 已知抛物线 $y=mx^2(m>0)$ 上的点 $(x_0,2)$ 到该抛物线焦点 F 的距离为 $\frac{17}{8}$,则 $m=$

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

3. 为了贯彻落实《中共中央国务院全面加强新时代大中小学劳动教育的意见》的文件精神,某学校结合自身实际,推出了《植物栽培》《手工编织》《实用木工》《实用电工》《烹饪技术》五门校本劳动选修课程,要求每个学生从中任选三门进行学习,学生经考核合格后方能获得该学校荣誉毕业证,则甲、乙两人的选课中仅有一门课程相同的概率为

A. $\frac{3}{25}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{3}{5}$

4. 已知 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,若存在 $m\in\mathbf{N}^*$,满足 $\frac{S_{2m}}{S_m}=9$,$\frac{a_{2m}}{a_m}=\frac{5m+1}{m-1}$,则数列 $\{a_n\}$ 的公比为

A. -2　　B. 2　　C. -3　　D. 3

5. 已知大气压强 $p=\frac{压力}{受力面积}$,它的单位是"帕斯卡"(Pa,1 Pa=1 N/m²),大气压强 p(Pa)随海拔高度 h(m)的变化规律是 $p=p_0e^{-kh}$ $(k=0.000126)$,p_0 是海平面大气压强. 已知在某高山 A_1,A_2 两处测得的大气压强分别为 p_1,p_2,且 $\frac{p_1}{p_2}=\frac{1}{2}$,那么 A_1,A_2 两处的海拔高度的差约为(参考数据:$\ln2\approx0.693$)

A. 550m　　B. 1818m　　C. 5500m　　D. 8732m

6. 在平行四边形 $ABCD$ 中,$\angle BAD=60°$,$AB=4$,$AD=3$,且 $\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$,则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=$

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 10

7. 已知函数 $f(x)=\log_3(9^x+1)-x$，设 $a=f(\frac{1}{10})$，$b=f(-e^{-\frac{9}{10}})$，$c=f(\ln\frac{11}{10})$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<a<b$　　D. $b<a<c$

8. 斜率为 $\frac{1}{3}$ 的直线 l 经过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点 F_1，交双曲线两条渐近线于 A,B 两点，F_2 为双曲线的右焦点且 $|AF_2|=|BF_2|$，则双曲线的渐近线方程为

A. $y=\pm x$　　B. $y=\pm\sqrt{2}x$　　C. $y=\pm 2x$　　D. $y=\pm\frac{1}{2}x$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知复数 $z=\cos140°+i\sin140°$，i 为虚数单位，则下列说法正确的是

A. z 的虚部为 $i\sin140°$　　B. z 在复平面上对应的点位于第二象限

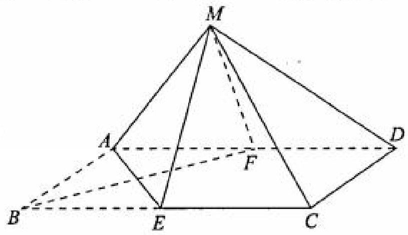
C. $z=\frac{1}{\bar{z}}$　　D. $z^3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

10. 为庆祝中国共产党成立 100 周年，A、B、C、D 四个兴趣小组举行党史知识竞赛，每个小组各派 10 名同学参赛，记录每名同学失分(均为整数)情况，若该组每名同学失分都不超过 7 分，则该组为“优秀小组”，已知 A、B、C、D 四个小组成员失分数据信息如下，则一定为“优秀小组”的是

A. A 组中位数为 2，极差为 5　　B. B 组平均数为 2，众数为 2

C. C 组平均数为 1，方差大于 0　　D. D 组平均数为 2，方差为 3

11. 如图，矩形 $ABCD$ 中，已知 $AB=2$，$BC=4$，E 为 BC 的中点. 将△ABE 沿着 AE 向上翻折至△MAE 得到四棱锥 $M-AECD$，平面 AEM 与平面 $AECD$ 所成锐二面角为 α，直线 ME 与平面 $AECD$ 所成角为 β，则下列说法正确的是



(第 11 题图)

A. 若 F 为 AD 中点，则△ABE 无论翻折到哪个位置都有平面 $AEM\perp$平面 MBF

B. 若 Q 为 MD 中点，则△ABE 无论翻折到哪个位置都有 CQ //平面 AEM

C. $\sqrt{2}\sin\alpha=\sin\beta$

D. 存在某一翻折位置，使 $\sqrt{2}\cos\alpha=\cos\beta$

12. 已知函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|-\sin2x-1$，则下列说法正确的是

A. $f(x)$是以 π 为周期的函数

B. $x=\frac{\pi}{2}$ 是曲线 $y=f(x)$的对称轴

C. 函数 $f(x)$的最大值为 $\sqrt{2}$，最小值为 $\sqrt{2}-2$

D. 若函数 $f(x)$在 $(0,M\pi)$上恰有 2021 个零点，则 $\frac{2021}{2}<M\leqslant 1011$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}})^n$ 的展开式中，只有第 9 项的二项式系数最大，则展开式中 x 的幂的指数为整数的项共有________项.

14. 写出一个定义在 **R** 上且使得命题“若 $f'(1)=0$，则 1 为函数 $f(x)$的极值点”为假命题的函数 $f(x)$

=________.

15. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的五个顶点都在球 O 的表面上，若底面 $ABCD$ 是梯形，且 $CD//AB$，$AD=BC=CD=\frac{1}{2}AB=\sqrt{5}$，则当球 O 的表面积最小时，四棱锥 $P-ABCD$ 的高的最大值为________.

16. 设 $a_n=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\cdots+\frac{n^2}{2n-1}$，$b_n=\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\cdots+\frac{n^2}{2n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，记最接近 a_n-b_n 的整数为 c_n，则 $c_{505}=$________；$c_n=$________.（用 n 表示）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=a$（a 为常数），$a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}+3n-1(n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)若 $a=\frac{3}{2}$，$b_n=a_n-2n$，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

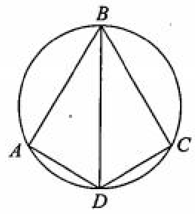
(2)是否存在实数 a，使数列 $\{a_n\}$ 为等差数列？若存在，求出 a 的所有值，若不存在，请说明理由.

18.（12 分）

已知平面四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，$AB=BC=3$，$\angle ABC=60°$.

(1)若 $CD=\sqrt{3}$，求 $\angle ABD$ 所对的圆弧 $\overset{\frown}{AD}$ 的长；

(2)求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.



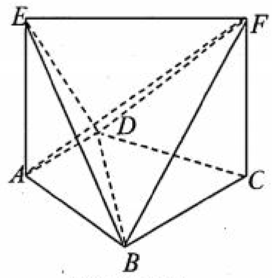
（第 18 题图）

19.（12 分）

七面体玩具是一种常见的儿童玩具. 在几何学中，七面体是指由七个面组成的多面体，常见的七面体有六角锥、五角柱、正三角锥柱、Szilassi 多面体等. 在拓扑学中，共有 34 种拓扑结构明显差异的凸七面体，它们可以看作是由一个长方体经过简单切割而得到的. 在如图所示的七面体 $EABCFD$ 中，$EA\perp$ 平面 $ABCD$，$EA//FC$，$AD//BC$，$AD\perp AB$，$AD=AB=2$，$BC=FC=EA=4$.

(1)在该七面体中，探究以下两个结论是否正确. 若正确，给出证明；若不正确，请说明理由：①$EF//$平面 $ABCD$；②$AF\perp$平面 EBD；

(2)求该七面体的体积.



（第 19 题图）

20.（12 分）

某市消防部门对辖区企业员工进行了一次消防安全知识问卷调查，通过随机抽样，得到参加问卷调查的 500 人（其中 300 人为女性）的得分（满分 100）数据，统计结果如表所示：

得分	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
男性人数	20	60	40	40	30	10
女性人数	10	70	60	75	50	35

(1)把员工分为对消防知识“比较熟悉”（不低于 70 分的）和“不太熟悉”（低于 70 分的）两类，请完成如下

2×2 列联表，并判断是否有 99%的把握认为该企业员工对消防知识的熟悉程度与性别有关？

	不太熟悉	比较熟悉	合计
男性			
女性			
合计			

(2)为增加员工消防安全知识及自救、自防能力，现将企业员工分成两人一组开展“消防安全技能趣味知识”竞赛. 在每轮比赛中，小组两位成员各答两道题目，若他们答对题目个数和不少于 3 个，则小组积 1 分，否则积 0 分. 已知 A 与 B 在同一小组，A 答对每道题的概率为 p_1，B 答对每道题的概率为 p_2，且 $p_1+p_2=1$，理论上至少要进行多少轮比赛才能使 A、B 所在的小组的积分的期望值不少于 5 分？

附：参考公式及 K^2 检验临界值表

$P(k^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$k^2=\dfrac{n\,(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=\ln(x+1)+mx^2$，$m>0$.

(1)若 $f(x)$在$(1,f(1))$处的切线斜率为$\dfrac{13}{2}$，求函数 $f(x)$的单调区间；

(2)$g(x)=f(x)-\sin x$，若 $x=0$ 是 $g(x)$的极大值点，求 m 的取值范围.

22.(12 分)

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F_1$、$F_2$ 分别是椭圆的左、右焦点，P 是椭圆上的动点，直线 PF_1 交椭圆于另一点 M，直线 PF_2 交椭圆于另一点 N，当 P 为椭圆的上顶点时，有$|PM|=|MF_2|$.

(1)求椭圆 E 的离心率；

(2)求$\dfrac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle PMN}}$的最大值.

机密★启用前(新高考卷)

华中师范大学第一附属中学 2021 年高考押题卷

数学参考答案和评分标准

一、选择题:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	C	B	C	D	C	D	BCD	AD	ABD	ACD

1.【答案】D

【解析】由已知($\complement_R N$)⊆($\complement_R M$)得:$M \subseteq N$,得答案为 D.

2.【答案】B

【解析】点$(x_0,2)$到焦点 F 的距离等于到准线 $y=-\frac{1}{4m}$的距离,则 $2+\frac{1}{4m}=\frac{17}{8}$,解得 $m=2$.

3.【答案】C

【解析】$P=\frac{C_5^1C_4^2}{C_5^3C_5^3}=\frac{3}{10}$.

4.【答案】B

【解析】设数列$\{a_n\}$的公比为 q,若 $q=1$,则$\frac{S_{2m}}{S_m}=2$,与题中条件矛盾,故 $q\neq1$.

$\because \frac{S_{2m}}{S_m}=\frac{\frac{a_1(1-q^{2m})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^m)}{1-q}}=q^m+1=9$,$\therefore q^m=8$. $\because \frac{a_{2m}}{a_m}=\frac{a_1q^{2m-1}}{a_1q^{m-1}}=q^m=8=\frac{5m+1}{m-1}$,$\therefore m=3$,$\therefore q^3=8$,$\therefore q=2$. 故选 B.

5.【答案】

【解析】设 A_1,A_2 两处的海拔高度分别为 h_1,h_2,则$\frac{p_1}{p_2}=\frac{1}{2}=\frac{p_0e^{-kh_1}}{p_0e^{-kh_2}}=e^{k(h_2-h_1)}$,

$\therefore h_2-h_1=\frac{-\ln2}{0.000126}\approx\frac{-0.693}{0.000126}=-5500\text{m}$.

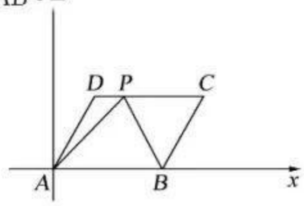
6.【答案】D

【解析】方法一:由题知$\overrightarrow{DP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$,则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DP}=$

$|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos60°+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2=4\times3\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times16=10$. 故选 D.

方法二:如图,以 A 为原点,AB 所在直线为 x 轴,过点 A 且垂直 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\cdot=$

线为 y 轴,建立直角坐标系,则 $A(0,0)$,$B(4,0)$,$D\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$



$\overrightarrow{PD}$,$\therefore|\overrightarrow{DP}|=1$,$\therefore P\left(\frac{5}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,$\therefore\overrightarrow{AP}=\left(\frac{5}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{AB}=(4,0)$,$\therefore\overrightarrow{AP}\cdot$

$\overrightarrow{AB}=\frac{5}{2}\times4+\frac{3\sqrt{3}}{2}\times0=10$. 故选 D.

7.【答案】C

【解析】$\because f(x)=\log_3(9^x+1)-x=\log_3(3^x+3^{-x})$,$\therefore f(x)$为偶函数且在$(0,+\infty)$上为增函数,

则 $b=f(-e^{-\frac{9}{10}})=f(e^{-\frac{9}{10}})$，∵$e^x-x-1\geqslant0$（当且仅当 $x=0$ 时取等号），∴$e^x>x+1(x\neq0)$，

故 $e^{-\frac{9}{10}}>-\frac{9}{10}+1=\frac{1}{10}$，即 $b>a$；∵$\ln x-x+1\leqslant0$（当且仅当 $x=1$ 时取等号），

∴$\ln x<x-1(x\neq1)$，∴$\ln\frac{11}{10}<\frac{11}{10}-1=\frac{1}{10}$，∴$a>c$. 综上 $b>a>c$. 故选 C.

8.【答案】D

【解析】设 AB 的中点为 M，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$，则$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=0\\\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=0\end{cases}$，∴$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$，则 $k_{AB}\cdot k_{OM}=\frac{b^2}{a^2}$，∴$k_{OM}=\frac{3b^2}{a^2}$，设直线 AB 的倾斜角为 θ，∵$|AF_2|=|BF_2|$，

∴$AB\perp MF_2$，∴$|OM|=|OF_1|=|OF_2|$，则 OM 的斜率为 $\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-(\frac{1}{3})^2}=\frac{3}{4}$，∴$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，

∴双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，故选 D.

9.【答案】BCD

【解析】由虚部概念知 A 错误；由 $\cos140^\circ<0$，$\sin140^\circ>0$，B 正确；B 正8(

∵$z^2=\cos^2140^\circ-\sin^2140^\circ+2i\sin140^\circ\cos140^\circ=\cos280^\circ+i\sin280$ isin28(

∴$z^3=z^2\cdot z=\cos420^\circ+i\sin420^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，D 正确.

10.【答案】AD

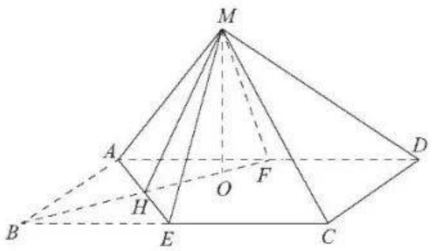
【解析】对 A，因为中位数为 2，极差为 5，故最大值不会大于 2+5=7. 故 A 正确；

对 B，失分数据分别为 0,0,0,2,2,2,2,2,2,8，则满足平均数为 2，众数为 2，但不满足每名同学失分都不超过 7 分，故 B 错误；

对 C，失分数据分别为 0,0,0,0,0,0,0,0,1,9，则满足平均数为 1，方差大于 0，但不满足每名同学失分都不超过 7 分，故 C 错误；

对 D，利用反证法，假设有一同学失分超过 7 分，则方差大于$\frac{1}{10}\times(8-2)^2=3.6>3$. 与题设矛盾，故每名同学失分都不超过 7 分. 故 D 正确.

11.【答案】ABD



【解析】若 F 为 AD 中点，连接 BF 交 AE 于点 H，则 $AE\perp$面 MBF，又 $AE\subset$面 MAE，所以平面 $AEM\perp$平面 MBF，A 正确；

取 AM 中点 P，则 $PQ\underline{\mathbin{/\!/}}\frac{1}{2}AD$，又 $CE\underline{\mathbin{/\!/}}\frac{1}{2}AD$，∴$PQ\underline{\mathbin{/\!/}}CE$，

∴$CQ/\!/EP$，B 正确；

过 M 作 $MO\perp$平面 $AECD$，则 O 在 BF 上，所以平面 AEM 与平面 $AECD$ 所成锐二面角为$\angle MHB$（或其补角），∴$\sin\alpha=\frac{MO}{MH}$，$\sin\beta=\frac{MO}{ME}=\frac{MO}{\sqrt{2}MH}$，∴$\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\beta$，C 错误；

若$\sqrt{2}\cos\alpha=\cos\beta$，又 $\cos\alpha=\frac{OH}{MH}$，$\cos\beta=\frac{OE}{ME}=\frac{OE}{\sqrt{2}MH}$，则 $OE=2OH$，D 正确

12.【答案】ACD

【解析】因为 $f(x+\pi)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数，A 正确；
又 $f(\pi-x)=|\sin x|+|\cos x|+\sin 2x-1\neq f(x)$，B 错误；
由 A 知只需考虑 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值.

①当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，令 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，则 $t\in[1,\sqrt{2}]$，$f(x)=-t^2+t=u(t)$，易知 $u(t)$ 在区间 $[1,\sqrt{2}]$ 上单调递减，所以，$f(x)$ 的最大值为 $u(1)=0$，最小值为 $u(\sqrt{2})=\sqrt{2}-2$.

②当 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$ 时，令 $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$，则 $t\in[1,\sqrt{2}]$，$f(x)=t^2+t-2=v(t)$，易知 $v(t)$ 在区间 $[1,\sqrt{2}]$ 上单调递增，所以，$f(x)$ 的最大值为 $v(\sqrt{2})=\sqrt{2}$，最小值为 $v(1)=0$.

综合可知：函数 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，最小值为 $\sqrt{2}-2$，C 正确；
因为 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数，可以先研究函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi]$ 上的零点个数，易知 $f(\pi)=0$.

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 时，令 $f(x)=u(t)=-t^2+t=0$，解得 $t=0$ 或 1，

$t=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=0$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上无解，$t=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上仅有一解 $x=\frac{\pi}{2}$.

当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，令 $f(x)=v(t)=t^2+t-2=0$，解得 $t=-2$ 或 1.

$t=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=-2$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上无解，$t=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=1$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上也无解.

综合可知：函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi]$ 上有两个零点，分别为 $x=\frac{\pi}{2}$ 和 $x=\frac{\pi}{2}$ 和 ≤101 1011，D 正确.

又因为 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数，所以，若 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $f(x)$ 在 $(0,n\pi]$ 上恰有 $2n$ 个零点.

又已知函数 $f(x)$ 在 $(0,M\pi)$ 上恰有 2021 个零点，所以 $\frac{2021}{2}<M\leqslant 1011$，D 正确.

13.【答案】5

【解析】由已知 $n=16$，展开式通项 $T_{r+1}=C_n^r(\sqrt{x})^{n-r}(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}})^r=C_n^r(\frac{1}{2})^r x^{\frac{n}{2}-\frac{3r}{4}}$，则 $r=0,4,8,12,16$ 共 5 项.

14.【答案】$(x-1)^3$（答案不唯一）

15.【答案】$\sqrt{5}$

【解析】球心在平面 $ABCD$ 上射影落在四边形 $ABCD$ 外接圆圆心处（即 AB 中点），设球心 O 到平面 $ABCD$ 的距离为 d，则由 $R^2=d^2+\frac{1}{4}AB^2=d^2+5\geqslant 5$ 得，外接球半径最小值为 $\sqrt{5}$，当 $PO\perp$ 面 $ABCD$ 时，高最大为 $\sqrt{5}$.

16.【答案】253；$\begin{cases}\frac{n}{2} & n\text{ 为偶数}\\ \frac{n+1}{2} & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

【解析】$a_{505}=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{5}+\cdots\frac{505^2}{1009}$，$b_{505}=\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\cdots+\frac{504^2}{1009}+\frac{505^2}{1011}$，

$\therefore a_{505}-b_{505}=1+\frac{2^2-1^2}{3}+\frac{3^2-2^2}{5}+\cdots+\frac{505^2-504^2}{1009}-\frac{505^2}{1011}=505-\frac{505^2}{1011}=\frac{505\times 506}{505+506}$

$\therefore \frac{2}{506}<\frac{1}{a_{505}-b_{505}}=\frac{1}{505}+\frac{1}{506}<\frac{2}{505}$

$\therefore 252.5<a_{505}-b_{505}<253$

$\therefore c_{505}=253$.

$a_n-b_n=n-\frac{n^2}{2n+1}=\frac{n^2+n}{2n+1}$

$\therefore \frac{1}{a_n-b_n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\in\left(\frac{2}{n+1},\frac{2}{n}\right)$

$\therefore \frac{n}{2}<a_n-b_n<\frac{n+1}{2}$

若 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $c_n=k=\frac{n}{2}$，

若 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $c_n=k=\frac{n+1}{2}$，

$\therefore c_n=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\text{为偶数}\\ \frac{n+1}{2} & n\text{为奇数}\end{cases}$

17.【解析】

(1)$\because a_n-2n=-\frac{1}{2}a_{n-1}+n-1=-\frac{1}{2}(a_{n-1}-2n+2)(n\geqslant 2)$，…………（1分）

$\therefore b_n=-\frac{1}{2}b_{n-1}(n\geqslant 2)$，又 $b_1=a_1-2=-\frac{1}{2}\neq 0$，…………（2分）

则数列$\{b_n\}$是以$-\frac{1}{2}$为首项，$-\frac{1}{2}$为公比的等比数列，…………

$\therefore a_n=b_n+2n=(-\frac{1}{2})^n+2n$，…………（3分）

$\therefore S_n=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+n(n+1)=\frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right]+n(n+1)$. …………（5分）

(2)$\because b_n=-\frac{1}{2}b_{n-1}(n\geqslant 2)$，$b_1=a-2$，

若 $a=2$，则 $b_n=0$，$\therefore a_n=2n$，$\therefore a_{n+1}-a_n=2$，此时数列$\{a_n\}$为等差数列；…………（7分）

若 $a\neq 2$，则数列$\{b_n\}$为以 $a-2$ 为首项，$-\frac{1}{2}$为公比的等比数列，$\therefore a_1=a$，$a_2=-\frac{1}{2}a+5$，$a_3=\frac{1}{4}a+\frac{11}{2}$，

$\therefore a_1+a_3\neq 2a_2$，此时数列$\{a_n\}$不可能为等差数列. …………（9分）

综上，存在实数 $a=2$，使数列$\{a_n\}$为等差数列. …………（10分）

18.【解析】

(1)连接 AC，$AB=BC=3$，$\angle ABC=60^\circ$，$\therefore AC=3$ …………（1分）

又$\angle ADC=120^\circ$，在$\triangle ACD$中由余弦定理，$\cos 120^\circ=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$，即$-\frac{1}{2}=\frac{AD^2-6}{2\sqrt{3}AD}$，$\therefore AD=\sqrt{3}$

…………（3分）

又$\triangle ABC$的外接圆半径 $R=\frac{AC}{2\sin 60^\circ}=\sqrt{3}$ …………（4分）

$\therefore \triangle OAD$为正三角形，$\angle AOD=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \angle ABD$所对的圆弧$\overset{\frown}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$. …………（6分）

(2)在$\triangle ACD$中，由余弦定理 $\cos\angle ADC=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$

即 $AD^2+CD^2+AD\cdot CD=9$，…………（8分）

$a_n-b_n=n-\frac{n^2}{2n+1}=\frac{n^2+n}{2n+1}$

$\therefore \frac{1}{a_n-b_n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\in\left(\frac{2}{n+1},\frac{2}{n}\right)$

$\therefore \frac{n}{2}<a_n-b_n<\frac{n+1}{2}$

若 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $c_n=k=\frac{n}{2}$，

若 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $c_n=k=\frac{n+1}{2}$，

$\therefore c_n=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\text{ 为偶数}\\ \frac{n+1}{2} & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

17.【解析】

(1) $\because a_n-2n=-\frac{1}{2}a_{n-1}+n-1=-\frac{1}{2}(a_{n-1}-2n+2)(n\geqslant 2)$，…………（1分）

$\therefore b_n=-\frac{1}{2}b_{n-1}(n\geqslant 2)$，又 $b_1=a_1-2=-\frac{1}{2}\neq 0$，…………（2分）

则数列$\{b_n\}$是以$-\frac{1}{2}$为首项，$-\frac{1}{2}$为公比的等比数列，…………

$\therefore a_n=b_n+2n=(-\frac{1}{2})^n+2n$，…………（3分）

$\therefore S_n=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+n(n+1)=\frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right]+n(n+1)$. …………（5分）

(2) $\because b_n=-\frac{1}{2}b_{n-1}(n\geqslant 2)$，$b_1=a-2$，

若 $a=2$，则 $b_n=0$，$\therefore a_n=2n$，$\therefore a_{n+1}-a_n=2$，此时数列$\{a_n\}$为等差数列；…………（7分）

若 $a\neq 2$，则数列$\{b_n\}$为以 $a-2$ 为首项，$-\frac{1}{2}$为公比的等比数列，$\therefore a_1=a$，$a_2=-\frac{1}{2}a+5$，$a_3=\frac{1}{4}a+\frac{11}{2}$，

$\therefore a_1+a_3\neq 2a_2$，此时数列$\{a_n\}$不可能为等差数列. …………（9分）

综上，存在实数 $a=2$，使数列$\{a_n\}$为等差数列. …………（10分）

18.【解析】

(1)连接 AC，$AB=BC=3$，$\angle ABC=60^\circ$，$\therefore AC=3$ …………（1分）

又$\angle ADC=120^\circ$，在$\triangle ACD$中由余弦定理，$\cos 120^\circ=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$，即$-\frac{1}{2}=\frac{AD^2-6}{2\sqrt{3}AD}$，$\therefore AD=\sqrt{3}$

…………（3分）

又$\triangle ABC$的外接圆半径 $R=\frac{AC}{2\sin 60^\circ}=\sqrt{3}$ …………（4分）

$\therefore \triangle OAD$ 为正三角形，$\angle AOD=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \angle ABD$ 所对的圆弧$\overset{\frown}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$. …………（6分）

(2)在$\triangle ACD$中，由余弦定理 $\cos\angle ADC=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}$

即 $AD^2+CD^2+AD\cdot CD=9$，…………（8分）

$P=C_2^1P_1(1-P_1)C_2^2(P_2)^2+C_2^2(P_1)^2C_2^1P_2(1-P_2)+C_2^2(P_1)^2C_2^2(P_2)^2$

$=2P_1P_2(P_1+P_2)-3(P_1P_2)^2$, …………………………………………………… ……………（7分）

又∵$P_1+P_2=1,0\leqslant P_2\leqslant 1$,则 $P_1P_2=(1-P_2)P_2\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$

∴$P=2P_1P_2-3(P_1P_2)^2=-3\left(P_1P_2-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$,且 $0\leqslant P_1P_2\leqslant\frac{1}{4}$, … ……………（8分）

∴$P_{\max}=\frac{5}{16}$,此时 $P_1P_2=\frac{1}{4}$, ………… ………………（10分）

设 A、B 所在的小组在 n 轮比赛中的积分为 ξ,则 $\xi\sim B(n,p)$,

∴$E\xi=\frac{5}{16}n\geqslant 5$,∴$n\geqslant 16$,所以理论上至少要进行 16 轮比赛. ……………………………………（12分）

21.【解析】

(1)$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$,$f'(x)=\frac{1}{x+1}+2mx$, ……………………………………………（1分）

∴$f'(1)=\frac{1}{2}+2m=\frac{13}{2}$,∴$m=3$, ……………………………………………………………（2分）

∴$f'(x)=\frac{1}{x+1}+6x=\frac{6x^2+6x+1}{x+1}$,

令 $f'(x)=0$,得 $x_1=\frac{-3-\sqrt{3}}{6}>-1$,$x_2=\frac{-3+\sqrt{3}}{6}$,

令 $f'(x)>0$,得$-1<x<x_1$ 或 $x>x_2$;令 $f'(x)<0$,得 $x_1<x<x<$

所以 $f(x)$在$(-1,x_1)$和$(x_2,+\infty)$上单调递增,在(x_1,x_2)上单调递减

即 $f(x)$的单调递增区间为$\left(-1,\frac{-3-\sqrt{3}}{6}\right)$和$\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{6},+\infty\right)$,

单调递减区间为$\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{6},\frac{-3+\sqrt{3}}{6}\right)$. ………………………………… ……（6分）

(2)由题意知 $g(x)=\ln(x+1)+mx^2-\sin x$,$g(0)=0$,$g'(x)=\frac{1}{1+x}+2mx-\cos x$,$g'(0)=0$,

令 $h(x)=g'(x)$,则 $h'(x)=2m-\frac{1}{(1+x)^2}+\sin x$,$h'(0)=2m-1$ ……………………（7分）

若 $0<m<\frac{1}{2}$,因为当 $x\in\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$时,$y=-\frac{1}{(1+x)^2}$单调递增,所以 $h'(x)$在$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增.

又因为 $h'(0)=2m-1<0$,$h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2m+1-\frac{1}{\left(1+\frac{\pi}{2}\right)^2}>0$,

因此存在 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$使得 $h'(x_0)=0$,

所以当 $x\in(-1,x_0)$时,$h'(x)<h'(x_0)=0$,$g'(x)=h(x)$在$(-1,x_0)$上单调递减,又 $g'(0)=h(0)=0$,

所以当 $x\in(-1,0)$时,$g'(x)>0$;当 $x\in(0,x_0)$时,$g'(x)<0$,

所以 $g(x)$在$(-1,0)$上单调递增,在$(0,x_0)$上单调递减,符合题意 （10分）

若 $m\geqslant\frac{1}{2}$,当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$h'(x)=2m-\frac{1}{(1+x)^2}+\sin x\geqslant 1-\frac{\quad}{(1+x)^2}+\sin x>0$,

所以 $h(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,$g'(x)>g'(0)=0$,$g(x)$在 $0,\frac{\pi}{2}$ 上单调递增,因此 $x=0$ 不可能是 $g(x)$的极大值点. ………… ……………（11分）

综上,当 $x=0$ 是 $g(x)$的极大值点时,m 的取值范围为 $0,\frac{\quad}{2}$. ……………………………………（12分）

22.【解析】

(1)当 P 为椭圆 E 的上顶点时，$|PF_1|=a$，$\therefore |MF_2|=|PM|=|MF_1|+a$，

又因为 $|MF_1|+|MF_2|=2a$，$\therefore |MF_1|=\frac{a}{2}$，$|PM|=|MF_2|=\frac{3a}{2}$

所以 $\cos\angle MPN=\frac{PM^2+PF_2^2-MF_2^2}{2PM\cdot PF_2}=\frac{\left(\frac{3}{2}a\right)^2+a^2-\left(\frac{3}{2}a\right)^2}{2\cdot\frac{3}{2}a\cdot a}=\frac{1}{3}$

所以 $\cos\angle MPN=1-2\sin^2\angle MPO=\frac{1}{3}$，$\therefore \sin\angle MPO=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore e=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………　……………………………………（5分）

(2)方法一：设 $P(x_0,y_0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$PF_1=\lambda F_1M$，$PF_2=\mu\overrightarrow{F_2N}$，$(\lambda,\mu>0)$

$\therefore(-c-x_0,-y_0)=\lambda(x_1+c,y_1)$，$(c-x_0,-y_0)=\mu(x_2-c,y_2)$，

$\therefore x_1=-\left(\frac{x_0+c}{\lambda}+c\right)$，$y_1=-\frac{y_0}{\lambda}$，

又$\because$点 P 在椭圆上，则$\frac{\left(\frac{x_0+c}{\lambda}+c\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{y_0}{\lambda}\right)^2}{b^2}=1$，

$\therefore\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)+\frac{2c(1+\lambda)x_0+c^2(1+\lambda)^2}{a^2}=\lambda^2$，又$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，

$\therefore 2c(1+\lambda)x_0+c^2(1+\lambda)^2=(\lambda^2-1)a^2=3c^2(\lambda^2-1)$，

$\therefore\lambda=\frac{x_0+2c}{c}$，同理 $\mu=\frac{x_0-2c}{-c}=\frac{2c-x_0}{c}$（用“$-c$”代替“$c$”），

$\therefore\lambda+\mu=4$，……　……………　（10分）

$\therefore\frac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle PMN}}=\frac{|PF_1|\cdot|PF_2|}{|PM|\cdot|PN|}=\frac{\lambda\mu}{(\lambda+1)(\mu+1)}=\frac{\lambda\mu}{\lambda\mu+5}=\frac{1}{1+\frac{5}{\lambda\mu}}$

又 $\lambda+\mu\geqslant 2\sqrt{\lambda\mu}$，$\therefore\lambda\mu\leqslant 4$，所以$\frac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle PMN}}$的最大值为$\frac{4}{9}$. ……………………………………………（12分）

方法二：设 $P(x_0,y_0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{PF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1M}$，$\overrightarrow{PF_2}=\mu\overrightarrow{F_2N}$，

$\therefore\begin{cases}x_0+\lambda x_1=-c(1+\lambda)\\ y_0+\lambda y_1=0\end{cases}$，$\begin{cases}x_0+\mu x_2=c(1+\mu)\\ y_0+\mu y_2=0\end{cases}$，

由$\begin{cases}2x_0^2+3y_0^2=3b^2\\ 2x_1^2+3y_1^2=3b^2\end{cases}$，得 $2x_0^2+3y_0^2-\lambda^2(2x_1^2+3y_1^2)=3b^2(1-\lambda^2)$，

即 $2(x_0+\lambda x_1)(x_0-\lambda x_1)+3(y_0+\lambda y_1)(y_0-\lambda y_1)=3b^2(1-\lambda^2)$，

$\therefore 2(-c-\lambda c)(x_0-\lambda x_1)=3b^2(1-\lambda^2)$，即 $x_0-\lambda x_1=\frac{3b}{\sqrt{2}}(\lambda-1)$，同理 $x_0-\lambda x_2=\frac{3b}{\sqrt{2}}(1-\mu)$，

$\therefore\lambda x_1-\mu x_2=\frac{3b}{\sqrt{2}}(1-\mu)+\frac{3b}{\sqrt{2}}(1-\lambda)=3c(2-\lambda-\mu)$，

又$\because\lambda x_1-\mu x_2=-c(1+\lambda)-c(1+\mu)=c(-2-\lambda-\mu)$，

$\therefore c(-2-\lambda-\mu)=3c(2-\lambda-\mu)$，$\therefore\lambda+\mu=4$，以下同解法一

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 “ 专业、专注、有态度 ” 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。

微信搜一搜

自主选拔在线